1987年 2 月

数学研究与评论
第七期 第一卷

关于Hasson的两个猜测*

许 树 声

（江南大学）

记次数不超过 n 的代数多项式全体为 Π_n．对于自然数 k 及 $n\geq k$，记 Π_n 中 x^k 的系数为零的多项式全体为 Π_n^k．用 $C_{[a,b]}$ 表示区间〔a, b〕上连续函数的全体，$C^r_{[a,b]}$ 表示〔a, b〕上 r 阶连续可导函数的全体．对于函数 $f\in C_{[a,b]}$，定义

$$E_n(f)=E_n(f,[a,b])=\inf\{\|f-p_n\|_{[a,b]}:p_n\in\Pi_n\},$$

$$E_n^k(f)=E_n^k(f,[a,b])=\inf\{\|f-q_n\|_{[a,b]}:q_n\in\Pi_n^k\},$$

其中 $\|\cdot\|_{[a,b]}$ 表示空间 $C_{[a,b]}$ 中的一致范数，在不引起误解的情况下，可记为 $\|\cdot\|$．下文总假定 $f(x)$ 不是多项式，因而 $E_n(f)\neq 0$，且比值 $\dfrac{E_n^k(f)}{E_n(f)}$ 有意义．显然 $\dfrac{E_n^k(f)}{E_n(f)}\geq 1$，并且 $\dfrac{E_n^k(f)}{E_n(f)}$ 不一定有界．

1980年，M·Hasson〔1〕研究了 $E_n^k(x^k)$ 的无穷小的阶，并对满足某些特定条件的连续函数 $f(x)$，讨论了 $n\to\infty$ 时比值 $\dfrac{E_n^k(f)}{E_n(f)}$ 的大小．为了一般地用函数 $f(x)$ 的光滑性来估计 $\dfrac{E_n^k(f)}{E_n(f)}$，Hasson作出了如下猜测：

Hasson猜测一 任意给定自然数 k，只要整数 r 充分大，那么，当函数 $f\in C^r_{[0,1]}$ 时，必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{E_n^k(f)}{E_n(f)}=\infty$．

Hasson猜测二 任意给定自然数 k 及函数 $f\in C_{[-1,1]}$，若 f 在〔-1, 1〕的某一内点导数不存在，则 $\dfrac{E_n^k(f)}{E_n(f)}=O(1)$．

本文证明Hasson的二个猜测不真，并且对一般的连续函数 f 给出了 $n\to\infty$ 时 $\dfrac{E_n^k(f)}{E_n(f)}=O(1)$ 的充要条件．

定理1 对给定的自然数 k 和任意大的整数 r，存在函数 $f\in C^r_{[0,1]}$（或 $C^r_{[-1,1]}$），使得 $\dfrac{E_n^k(f)}{E_n(f)}=O(1)$．

证明 令 $f(x)=x^{r+1/2}$，$x\in[0,1]$．显然 $f\in C^r_{[0,1]}$（若将 $f(x)$ 作偶开拓，且仍记之为 $f(x)$，则 $f\in C^r_{[-1,1]}$）．当 $n\geq k$ 时，记 $f(x)$ 的 n 次最佳逼近多项式为：

*1983年 4 月29日收到．

$p_n^*(x)=\sum_{i=0}^n a_i x^i$．令

$$q_n(x)=\bar{a}_0+\bar{a}_1x+\cdots+\bar{a}_{k-1}x^{k-1}+\bar{a}_{k+1}x^{k+1}+\cdots+\bar{a}_nx^n,$$

其中$\bar{a}_i=a_i(2^{k-i}-1)$，$i=0,1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n$．因为$q_n(x)\in\Pi_n^k$，所以

$$E_n^k(f)\leq\left\|f-\frac{1}{2^{k-r-1/2}-1}q_n\right\|=\frac{1}{|2^{k-r-1/2}-1|}\|(2^{k-r-1/2}-1)f-q_n\|$$

$$\leq\frac{1}{|2^{k-r-1/2}-1|}\{\|2^{k-r-1/2}f-q_n-p_n^*\|+\|f-p_n^*\|\}$$

$$=\frac{1}{|2^{k-r-1/2}-1|}\{2^k\|f(\frac{x}{2})-p_n^*(\frac{x}{2})\|+\|f-p_n^*\|\}\leq\frac{2^k+1}{|2^{k-r-1/2}-1|}E_n(f).$$

于是定理1得证．

引理1 设$0<a<1$，整数$b>\frac{1}{a}$．若$g(t)=\sum_{i=1}^\infty a_i\cos b^it$，其中

$$\left.\begin{array}{l}a_{2^j-j}=a^{2^j},\ a_{2^j}=a^{2^j-j}\quad(j=3,4,\cdots),\\ a_i=a^i\quad(i\text{为自然数},\ i\neq2^j-j,\ i\neq2^j),\end{array}\right\}\tag{1}$$

则$g(t)$在〔$0,\pi$〕的可列个点上不存在无限导数，并且处处无有限导数．

证明 首先，记$t_m=\frac{2\pi}{b^m}$，$m=1,2,\cdots$，设$g(t)$在t_m处存在导数（有限或无限），那么，函数$R(t)=\sum_{i=m}^\infty a_i\cos b^it$在$t_m$上也有导数存在．因为$R(t_m)=\max\{R(t)\}$，所以$R'(t_m)=0$从而$g'(t_m)$有限．由此可知，$g(t)$在〔$0,\pi$〕的可列个点$t_m$（$m=1,2,\cdots$）上不存在无限导数．

其次，设$g(t)$在〔$0,\pi$〕上某一点t_0处有有限导数．记$\omega(g,t_0;\delta)=\sup\limits_{|t-t_0|\leq\delta}|g(t)-g(t_0)|$，那么

$$\omega(g,t_0;\delta)=O(\delta).\tag{2}$$

由谢庭藩在〔2〕中证明的定理1（令$\varphi(\delta)=\delta$）可知，（2）含有$a_i=O(\frac{1}{b^i})$．但是由条件$b>\frac{1}{a}$及（1）知道这是不可能的，因此$g(t)$在〔$0,\pi$〕上处处无有限导数．引理1证毕．

引理2 设$f(x)\in C_{[-1,1]}$的n次最佳逼近多项式中x^k的系数为$a_k^{(n)}$，那么存在仅与k有关的常数$c>0$使得

$$\frac{E_n^k(f)}{E_n(f)}\geq\frac{c|a_k^{(n)}|}{n^kE_n(f)}-1.\tag{3}$$

证明 记$f(x)$的n次最佳逼近多项式为$p_n^*(x)=\sum_{i=0}^n a_i^{(n)}x^i$．又分别记空间$\Pi_n^k$对函数$f(x)$和$x^k$的最佳逼近多项式为$q_n^*$和$\bar{q}_n$，于是

$$E_n^k(f)=\|f-q_n^*\|\geq\|p_n^*-q_n^*\|-\|f-p_n^*\|=|a_k^{(n)}|\cdot\left\|x^k+\frac{1}{a_k^{(n)}}(p_n^*-a_k^{(n)}x^k-q_n^*)\right\|$$
$$-E_n(f)\geq|a_k^{(n)}|\cdot\|x^k-\bar{q}_n\|-E_n(f).$$

由〔1〕定理2.5可知，$E_n^k(x^k,[-1,1])$同阶于$\frac{1}{n^k}$，于是由上式立即得（3），引理2证毕．

注 对于$f(x)\in C_{[0,1]}$，利用〔1〕定理2.1关于$E_n^k(x^k,[0,1])$同阶于$\frac{1}{n^{2k}}$的结果，可以类似地证明：

$$\frac{E_n^k(f)}{E_n(f)}\geq\frac{c'|a_k^{(n)}|}{n^{2k}E_n(f)}-1\qquad(c'>0).$$

定理2 存在函数$f(x)\in C_{[-1,1]}$，$f(x)$的导数在〔-1，1〕的无限多个内点不存在，而且$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{E_n^k(f)}{E_n(f)}=\infty$。

证明 任取$0<a<1$，若k为奇数，则取$b=4l+1>\dfrac{1}{a}$，若k为偶数，则取$b=4l>\dfrac{1}{a}$（l为整数）。令$f(x)=\Sigma_{i=1}^{\infty}a_iT_{b^i}(x)$，其中$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$表示$n$阶Чебышев多项式（下文亦如此），$a_i$的定义如（1）。我们将证明$f(x)$满足定理的要求。

显然，$f\in C_{[-1,1]}$。将引理1用于函数

$$g(t)=f(\cos t)=\Sigma_{i=1}^{\infty}a_i\cos b^it,$$

可知$g(t)$在〔$0,\pi$〕的可列个内点不存在导数，从而$f(x)$在〔-1，1〕的无限多个内点导数不存在。

若记$f(x)$的n次最佳逼近多项式为$p_n^*(x)$，则存在常数a_j（$j=3,4,\cdots$）使得

$$p_{b^{2^j}}^*(x)=a_j+\Sigma_{i=1}^{2^j}a_iT_{b^i}(x),\quad j=3,4,\cdots,\tag{4}$$

$$E_{b^{2^j}}(f)\le\Sigma_{i=2^j-1}^{\infty}a_i=\frac{a^{2^j+1}}{1-a},\quad j=3,4,\cdots.\tag{5}$$

事实上，如果记

$$r_j(x)=f(x)-\Sigma_{i=1}^{2^j}a_iT_{b^i}(x)=\Sigma_{i=2^j-1}^{\infty}a_iT_{b^i}(x),$$

并设t^*满足$r_j(\cos t^*)=\min\limits_t\{r_j(\cos t)\}$，取

$$\alpha=t^*-\frac{2\pi}{b^{2^j+1}}\left[\frac{t^*}{\frac{2\pi}{b^{2^j-1}}}\right],$$

$t_{2m}=\dfrac{2m\pi}{b^{2^j-1}}$（$m=0,1,\cdots,[\frac{1}{2}b^{2^j-1}]$），$t_{2m+1}=\dfrac{2m\pi}{b^{2^j+1}}+\alpha$

（$m=0,1,\cdots,b^{2^j+1}-[\frac{1}{2}b^{2^j+1}]-1$）

那么$r_j(\cos t_{2m})=\Sigma_{i=2^j+1}^{\infty}a_i=\max\limits_t\{r_j(\cos t)\}$，$r_j(\cos t_{2m+1})=\min\limits_t\{r_j(\cos t)\}\ge-\Sigma_{i=2^j-1}^{\infty}a_i$。令

$$a_j=\frac{\max\limits_t\{r_j(\cos t)\}+\min\limits_t\{r_j(\cos t)\}}{2},\quad x_i=\cos t_i,\ i=0,1,\cdots,b^{2^j+1}.$$

于是

$$-1=x_{b^{2^j+1}}<x_{b^{2^j+1}-1}<\cdots<x_1<x_0=1,$$

且$r_j(x)-a_j$在点$\{x_{b^{2^j+1}},x_{b^{2^j+1}-1},\cdots,x_1,x_0\}$上正负相间地取得$\|r_j(x)-a_j\|$。因为

$$r_j(x)-a_j=f(x)-(a_j+\Sigma_{i=1}^{2^j}a_iT_{b^i}(x)),$$

所以（4）成立，而（5）亦不难验证。

记$p_{b^{2^j}}(x)$中x^k的系数为$a_k^{(b^{2^j})}$，$T_{b^i}(x)$中x^k的系数为$c_k^{(b^i)}$。根据Чебышев多项式的性质，$b^i<k$时$c_k^{(b^i)}=0$，$b^i\ge k$时

$$\operatorname{sign}c_k^{(b^i)}=(-1)^{(b^i-k)/2}$$

因为当$b=4l+1$时，有

$$(-1)^{(b^{i-1}-k)/2}=(-1)^{(b^i-k)/2}\qquad(i=1,2,\cdots),$$

当$b=4l$时，有

$$(-1)^{(b^i-k)/2}=(-1)^{k/2}\quad(i=1,2,\cdots),$$

所以，不管 b 为奇数还是偶数，对于 $i=1,2,\cdots$，一切不为零的系数 $c_k^{(b^i)}$ 都同号．于是（4）含有

$$|a_k^{(b^{2^j})}|=|\Sigma_{i=1}^{2^j}a_ic_k^{(b^i)}|\geq a_{2^j}|c_k^{(b^{2^j})}|. \tag{6}$$

当 $b^{2^j}>k$ 时，根据〔3〕$p.79$的结果不难证明，存在与 j 无关的常数 $M>0$ 使得

$$|c_k^{(b^{2^j})}|\geq M(b^{2^j})^k . \tag{7}$$

结合引理2及（5），（6），（1），（7）即得

$$\frac{E_{b^{2^j}}^k(f)}{E_{b^{2^j}}(f)}\geq\frac{c|a_k^{(b^{2^j})}|}{(b^{2^j})^kE_{b^{2^j}}(f)}-1\geq\frac{ca_{2^j}|c_k^{(b^{2^j})}|}{(b^{2^j})^k\frac{a^{2^j+1}}{1-a}}-1\geq\frac{c\cdot M(1-a)}{a^{j+1}}-1\to\infty$$

$(j\to\infty)$，即 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{E_n^k(f)}{E_n(f)}=\infty$．定理2证毕．

注　对于 $C_{[0,1]}$ 的情形，定理2也成立，但这时所需考虑的函数是

$$f(x)=\Sigma_{i=1}^{\infty}a_iT_{b^i}(\sqrt{x}),\ x\in[0,1],$$

其中 $0<a<1$，$b=4l>\frac{1}{a}$．

定理1，2否定了Hasson的两个猜测，并且说明，为了估计 $\frac{E_n^k(f)}{E_n(f)}$ 的大小，不能仅考虑 f 的光滑性，而必须寻求别的工具．

由类似于引理2的推导，我们不难得到，当 $f(x)\in C_{[-1,1]}$ 时，存在仅与 k 有关的常数 $c>0$，使得

$$\frac{E_n^k(f)}{E_n(f)}\leq\frac{c|a_k^{(n)}|}{n^kE_n(f)}+1. \tag{8}$$

结合（3），（8）立即得到

定理3　设 $f(x)\in C_{[-1,1]}$ 的 n 次最佳逼近多项式中 x^k 的系数为 $a_k^{(n)}$，那么

$$\frac{E_n^k(f)}{E_n(f)}=O(1)\quad\text{当且仅当}\quad\frac{|a_k^{(n)}|}{n^kE_n(f)}=O(1).$$

只要注意引理2下面的注，就有

定理3′　设 $f(x)\in C_{[0,1]}$ 的 n 次最佳逼近多项式中 x^k 的系数为 $a_k^{(n)}$，那么

$$\frac{E_n^k(f)}{E_n(f)}=O(1)\quad\text{当且仅当}\quad\frac{|a_k^{(n)}|}{n^{2k}E_n(f)}=O(1).$$

定理3，3′用 $f(x)$ 的最佳逼近多项式的系数 $a_k^{(n)}$ 及 $E_n(f)$ 对比值 $\frac{E_n^k(f)}{E_n(f)}$ 作出了估计．由于求 $a_k^{(n)}$ 并非简单，因此我们代之以如下的定理4及4′，其中的 $\bar{a}_k^{(n)}$ 及 $\bar{a}_{2k}^{(n)}$ 是可以直接计算的．

定理4　设 $f\in C_{[-1,1]}$，$g(t)=f(\cos t)$ 的 n 阶de la Vallee-Poussin和为 $\tau_n(t)=$ $=\Sigma_{i=0}^{2n-1}\bar{a}_i^{(n)}\cos^i t$，那么

$$\frac{E_{2n-1}^k(f)}{E_n(f)}=O(1)\quad\text{当且仅当}\quad\frac{|\bar{a}_k^{(n)}|}{n^kE_n(f)}=O(1).$$

定理4′　设 $f\in C_{[0,1]}$，又设 $g(t)=f(\cos^2 t)$ 的 $2n$ 阶de le Vallee-Poussin和为

$\tau_{2n}(t)=\sum_{i=0}^{4n-1}\bar{a}_i^{(n)}\cos^i t$，那么

$$\frac{E_{2n-1}^k(f)}{E_n(f)}=O(1)\text{ 当且仅当}\frac{|\bar{a}_{2k}^{(n)}|}{n^{2k}E_n(f)}=O(1).$$

我们仅证明定证4′，定理4的证明类似，而且更简单一些。

设$g(t)$的Fourier级数是$\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cos it$，容易验证$a_{2i+1}=0$，$i=0,1,2,\cdots$。因此$\tau_{2n}(t)$可写为

$$\tau_{2n}(t)=c_0+c_2\cos 2t+\cdots+c_{4n-2}\cos[(4n-2)t].$$

因为$\cos 2it=T_{2i}(\cos t)$中只含有$\cos t$的偶次幂，所以将$\tau_{2n}(t)$写成

$$\tau_{2n}(t)=\sum_{i=0}^{4n-1}\bar{a}_i^{(n)}\cos^i t$$

的形式时，必有$\bar{a}_{2i+1}^{(n)}=0$，$i=0,1,\cdots,2n-1$。因此，若定义

$$\bar{p}_{2n-1}(x)=\tau_{2n}(\arccos(\pm\sqrt{x}))=\bar{a}_0^{(n)}+\bar{a}_2^{(n)}x+\cdots+\bar{a}_{2k}^{(n)}x^k+\cdots+\bar{a}_{4n-2}^{(n)}x^{2n-1},$$

则$\bar{p}_{2n-1}(x)$是一个$2n-1$次代数多项式。于是，对任意的$p_n(x)\in\Pi_n$，我们有

$$\begin{aligned}\|f(x)-\bar{p}_{2n-1}(x)\|_{[0,1]}&\leq 4E_{2n}^*(g)\\&\leq 4\|g(t)-p_n(\cos^2 t)\|_{[-\pi,\pi]}=4\|f(x)-p_n(x)\|_{[0,1]},\end{aligned}$$

其中$E_{2n}^*(g)$表示$2n$阶三角多项式对周期函数$g(t)$的最佳逼近。因此，

$$\|f(x)-\bar{p}_{2n-1}(x)\|_{[0,1]}\leq 4E_n(f,[0,1]).\tag{9}$$

记$[0,1]$上函数x^k在空间Π_n^k中的最佳逼近多项式为$\bar{q}_n(x)$，由（9）及[1]定理2.1得

$$\frac{E_{2n-1}^k(f)}{E_n(f)}\leq\frac{\|f-\bar{p}_{2n-1}+\bar{a}_{2k}^{(n)}x^k-\bar{a}_{2k}^{(n)}\bar{q}_n\|_{[0,1]}}{E_n(f)}$$

$$\leq\frac{|\bar{a}_{2k}^{(n)}|\cdot\|x^k-\bar{q}_n\|_{[0,1]}}{E_n(f)}+\frac{\|f-\bar{p}_{2n-1}\|_{[0,1]}}{E_n(f)}\leq\frac{C'|\bar{a}_{2k}^{(n)}|}{n^{2k}E_n(f)}+4,$$

其中$C'>0$是仅与k有关的常数。类似地可以得到

$$\frac{E_{2n-1}^k(f)}{E_n(f)}\geq\frac{c'|\bar{a}_{2k}^{(n)}|}{n^{2k}E_n(f)}-4\qquad(c'>0),$$

于是定理4′得证。

在定理4、4′的条件下，如果又有$\frac{E_n(f)}{E_{2n-1}(f)}=O(1)$，那么就有$\frac{E_n^k(f)}{E_n(f)}=O(1)$。

参 考 文 献

[1] Hasson, M., Comparison between the degrees of approximation by lacunary and ordinary algebraic polynomials, J. Approximation Theory, 29(1980), 103—115.

[2] 谢庭藩，关于缺项很多的富里埃级数，数学学报，14(1964)，313—318.

[3] Тиман, А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва (1960).

On Two Conjectures of M.Hasson

Xu Shusheng (许树声)

Abstract

Let $\|\cdot\|_{[a,b]}$ be the supremum norm in $C_{[a,b]}$. By Π_n we denote the collection of all algebraic polynomials of degree at most n. For positive integer k and $n \geq k$, let Π_n^k be the collection of all polynomials which are of degree at most n, and restricted not to contain the power x^k of x. If $f \in C_{[a,b]}$, then we define $E_n(f) = \inf\{\|f - p_n\|_{[a,b]}: p_n \in \Pi_n\}$, and $E_n^k(f) = \inf\{\|f - q_n\|_{[a,b]}: q_n \in \Pi_n^k\}$. we assume that $f(x)$ is not a polynomial, and therefore $E_n(f) \neq 0$.

In 1980, in estimating $E_n^k(f)/E_n(f)$ by the smoothness of the function $f(x)$, M. Hasson gave the following conjectures:

Hasson's conjecture 1 for a given integer $k \geq 1$, we have $\lim\limits_{n\to\infty} E_n^k(f)/E_n(f) = \infty$ if $f \in C^r_{[0,1]}$ for r large enough, where $C^r_{[0,1]}$ is the collection of r-times continuously differentiable functions.

Hasson's conjecture 2 If $f \in C_{[-1,1]}$ and f' does not exist at some interior point of $[-1,1]$, then $E_n^k(f)/E_n(f) = O(1)\ (n \to \infty)$.

In present paper we show both conjectures of Hasson are false, and give a necessary and sufficient condition for $E_n^k(f)/E_n(f) = O(1)$.