θ－类算子的谱及其导算子的值域*

宋　国　柱

（南京大学）

设H复复Hilbert 空间，$\mathscr{B}$(H) 表示H上的有界线性算子全体，对$T\in\mathscr{B}$(H)，定义内导算子Δ_T: $\mathscr{B}$(H) $\longrightarrow$ $\mathscr{B}$(H) 如下:

$$\Delta_T A=TA-AT \qquad (A\in\mathscr{B}(\mathrm{H}))$$

Stampfli〔2〕证明了若T是亚正常算子，则（i）Δ_T的值域R（Δ_T）闭的充要条件是$\sigma(T)$有限，（ii）R(Δ_T)$\cap$K＝Δ_T（K）的充要条件是$\sigma(T)$有限（K表示紧算子理想）．本文首先将亚正常算子的两个结论推广到S.L.Campbell 所定义的θ-类算子．

记$\theta=\{T\in\mathscr{B}(H)\mid[T^*T,T+T^*]=0\}$，其中$[A,B]=AB-BA$．关于$\theta$-类算子的性质可参阅〔4〕、〔5〕和〔6〕．在〔5〕中S.L.Campbell 举出了一个算子$T\in\theta$，但T不是亚正常算子．设$T\in\theta$，我们令

$$B(\lambda)=(\lambda-T^*)(\lambda-T)=\lambda^2-\lambda(T+T^*)+T^*T \tag{1}$$

显然，对任意的复数λ，$B(\lambda)$是正常算子，且$B(\lambda)^*=B(\bar{\lambda})$，记

$$C=\frac{T+T^*+i\sqrt{4T^*T-(T+T^*)}}{2} \tag{2}$$

则C为正常算子，$T+T^*=C+C^*$，$T^*T=C^*C=CC^*$，$B(\lambda)=(\lambda-C^*)(\lambda-C)$，且$\sigma(C)\cup\sigma(C^*)\subset\sigma(T)\cup\sigma(T^*)$（见〔5〕）．

定义　（见〔7〕）（1）$T\in\mathscr{B}$(H)，T的左本质谱$\sigma_{L_e}(T)=\{\lambda\in\Lambda\mid$存在标准直交序列$\{f_n\}\subset$H，使$\|(T-\lambda)f_n\|\longrightarrow 0\}$．

（2）$T\in\mathscr{B}$(H)，$\lambda\in\Lambda$，称T在λ是强正常的，如果存在标准直交序列$\{f_n\}\subset$H，使

$$\lim_{n\to\infty}(\|(T-\lambda)f_n\|+\|(T-\lambda)^*f_n\|)=0$$

当$\lambda\in\partial\sigma(T)$，且$\lambda$不是有限重孤立特征值时，则$\lambda\in\sigma_{L_e}(T)$（见〔7〕或〔8〕）

为简单起见，我们记

$$T(f_n,\lambda)=\|(T-\lambda)f_n\|+\|(T-\lambda)^*f_n\|$$

引理 1　设$T\in\theta$，$\lambda\in\partial\sigma(T)$，$\lambda$不是有限重孤立特征值，则$T$在$\lambda$是强正常的

证明　因为$\lambda\in\sigma_{L_e}(T)$，故存在标准直交序列$\{f_n\}\subset$H，使$\|(T-\lambda)f_n\|\longrightarrow 0$ ($n\to\infty$)．我们先设$\lambda\in$R，令C为（2）式所定义的正常算子，则

$$((C-\lambda)f_n,(C-\lambda)f_n)=((T-\lambda)f_n,(T-\lambda f_n)\longrightarrow 0.$$

由于C正常，及$\|(C-\lambda)^*f_n\|=\|(C-\lambda)f_n\|\longrightarrow 0$．

* 1983年4月30日收到．

$\|(T-\lambda)^* f_n\| \le \|[(T+T^*)-2\lambda]f_n\| + \|(T-\lambda)f_n\| = \|[(C+C^*)-2\lambda]f_n\| + \|$
$\|(T-\lambda)f_n\| \longrightarrow 0$.

因此T在λ是强正常的。

若$\lambda \notin R$，由$(T-\lambda)f_n \to 0$可推出$B(\lambda)f_n \to 0$，从而$B(\bar{\lambda})f_n = B(\lambda)^* f_n \longrightarrow 0$，但
$(\lambda - T^*)(\bar{\lambda}-T)f_n = (\bar{\lambda}-\lambda)(\bar{\lambda}-T)^* f_n + (\bar{\lambda}-T^*)(\lambda - T)f_n$，$\bar{\lambda}-\lambda = 0$，故

$$(\bar{\lambda}-T^*)f_n \longrightarrow 0.$$

T在λ也是强正常的。

引理 2 设$T\in\theta$，$\{\lambda_n\}\subset\partial\sigma(T)$，是互不相同非有限重孤立特征值，任给一下降正数序列$\{\varepsilon_n\}$，$\varepsilon_n\to 0$. 则存在标准直交序列$\{f_n\}\subset$H，使

（i） $T(f_n, \lambda_n) < \varepsilon_n$ $(n=1,2,3,\cdots,)$

（ii） $(f_j, Tf_n)=0$ $(n=1,2,\cdots,j-1)$

证明 **据引理1，T在每一点λ_n是强正常的，故f_1总存在，现设已经取好标准直交组$f_1, f_2, \cdots, f_k$，满足条件**

$T(f_i,\lambda_i) < \varepsilon_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$，$(f_i, Tf_n)=0$，$(i=1,2,\cdots,k;n=1,2,\cdots,i-1)$。

令

$$\mathrm{M} = \mathrm{CLm}\{f_1, Tf_1, f_2, Tf_2, \cdots, f_k, Tf_k\}$$

因为对λ_{k+1}，存在标准直交序列$\{h_j\}$，使$T(h_j,\lambda_{k+1}) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$，由〔7〕引理1，存在$f\in$H，使

（a）$f \perp \mathrm{M}$，（b）$\|f-h_l\| < \varepsilon_{k+1}/4(\|T\|+|\lambda_{k+1}|)$ （对某个l），（c）$T(h_l, \lambda_{k+1}) < \varepsilon_{k+1}/4$ （对（b）中的l）。

从而$T(f,\lambda_{k+1}) < \varepsilon_{k+1}$，我们令$f_{k+1}=f$，则$f_1, f_2, \cdots, f_{k+1}$满足（i），（ii），由归纳法立即知引理2结论成立.

命题 3 设$T\in\theta$，则下列结论成立:

（i）若$\lambda\in\sigma_p(T)$，则$\bar{\lambda}\in\sigma_p(T^*)$；（ii）若$\lambda_1, \lambda_2\in\sigma_p(T)$，$\lambda_1\ne\lambda_2$，则$\mathrm{N}(\lambda_1 - T)\perp\mathrm{N}(\lambda_2 - T)$，其中$\mathrm{N}(\lambda - T)$表示$(\lambda - T)$的零空间。

证明 首先类似于引理1的方法可证明$\mathrm{N}(\lambda - T)\subset\mathrm{N}(\lambda - T^*)$，故（i）成立，由（i）立即可推知（ii）成立.

命题 4 设$T\in\theta$，若$\sigma(T)$有限，则T为正常算子。

证明 首先证明若$\sigma(T)\subset\{\lambda\in\Lambda \mid |\lambda| = R\ge 0\}$，则$T$正常。事实上，如果$R=0$，则$\sigma(T)=\{0\}$，$T$为广义幂零算子，由〔4〕定理2，知$T=\theta$，若$R>0$，我们仍用$C$表示（2）式所定义的正常算子，则

$$\sigma(C^*C) = \{|\lambda|^2 \mid \lambda\in\sigma(C)\subset\sigma(T)\cup\sigma(T^*)\} = \{R^2\}$$

$T^*T = C^*C = R^2 I$，$\frac{1}{R^2}T^*T = I$，但$0\in\rho(T)$，故$T^*T = TT^* = R^2 I$. T为正常算子.

现设$\sigma(T)$有限，而T非正常，则据〔5〕推论3'，有$T=T_1\oplus T_2$，其中T_1完全非正常，$\sigma(T_1)=\sigma(T_1^*)$，$T_2$正常，我们记$\sigma_i = \{\lambda\in\sigma(T_1) \mid |\lambda| = R_i\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，易知每个σ_i是$\sigma(T_1)$的均衡块（即$\lambda\in\sigma_i \Leftrightarrow \bar{\lambda}\in\sigma_i$，且$\sigma_i$是$\sigma(T_1)$的孤立部分），不妨设$\sigma_{i_0}\ne\phi$，由

〔5〕定理4，$T_1 = T_1^{(1)} \oplus T_1^{(2)}$，$\sigma(T_1^{(1)}) = \sigma_{i_0}$，再由第一步所证，$T_1^{(1)}$ 为正常算子，这与T_1是完全非正常矛盾，故T必为正常算子．

命题3,4 的证明也可参阅〔6〕．

定理 5 设$T \in \theta$，则$R(\Delta_T) \cap K = \Delta_T(K)$的充分必要条件是$\sigma(T)$有限．

证明 充分性据命题4显然成立，我们仅证明必要性．设$\sigma(T)$是无限集，则$\sigma(T)$有一无穷边界点集，若$\partial\sigma(T)$（$\sigma(T)$的边界）有无穷多个互不相同的非有限重孤立特征值$\{\lambda_n\}$，据引理2，必存在标准直交序列$\{f_n\} \subset H$，使

$T(f_n, \lambda_n) < \varepsilon_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$，$(f_j, Tf_n) = 0 \quad (j > n)$.

我们可以设$\{\lambda_n\}$是收敛的，并取$\{\varepsilon_n\}$满足下面的条件

（a）$\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} > \cdots$，（b）$\varepsilon_n \leq |\lambda_{n+1} - \lambda_n|^2$ $(n=1,2,3,\cdots)$，（c）$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$.

令$H_1 = \operatorname{clm}\{f_n\}_1^{\infty}$，$H_2 = H_1^{\perp}$，如果我们记

$$T f_n = \mu_n f_n + \delta_n \tag{3}$$

其中$(\delta_n, f_n) = 0$，则$|\mu_n - \lambda_n| < \varepsilon_n$，$\|\delta_n\| < \varepsilon_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$，作有界线性算子V如下：

$$\begin{aligned} V f_n &= f_{n+1} \quad (\forall n) \\ V_g &= 0 \quad (\forall g \in H_2) \end{aligned} \tag{4}$$

我们证明$B = TV - VT$是紧线性算子，事实上，

$$(TV - VT) f_j = (\mu_{j+1} - \mu_j) f_{j+1} + \delta_{j+1} - V\delta_j,$$

则对任一$h \in H_1$，$h = \sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j$，有

$$(TV - VT) h = \sum_{j=1}^{\infty} a_j [(\mu_{j+1} - u_j) f_{j+1} + \delta_{j+1} - V\delta_j]. \tag{5}$$

对$g \in H_2$，$(TV - VT)g = -VTg$，设$Tg = \sum_{j=1}^{\infty} b_j f_j + \omega$，其中$\omega \in H_2$，再令$T^* f_j = \bar{\alpha}_j f_j + \gamma_j$，其中$(\gamma_j, f_j) = 0$，则易知$\alpha_j = \mu_j$．故$T^* f_j = \bar{\mu}_j f_j + \gamma_j$，由引理2，$\|\gamma_j\| < \varepsilon_j$，因此$b_j = (Tg, f_j) = (g, T^* f_j) = (g, \gamma_j)$，如果$\|g\| \leq 1$，则

$$|b_j| < \varepsilon_j \quad (j = 1,2,3,\cdots\cdots) \tag{6}$$

$$(TV - VT) g = -\sum_{j=1}^{\infty} b_j f_{j+1} \tag{7}$$

定义$B_N \in \mathscr{B}(H)$如下：

$$B_N h = \sum_{j=1}^{N} a_j [(\mu_{j+1} - \mu_j) f_{j+1} + \delta_{j+1} - V\delta_j] \quad (\forall h \in H_1) \tag{8}$$

$$B_N g = -\sum_{j=1}^{N} b_j f_{j+1} \quad (\forall g \in H_2) \tag{9}$$

则易证$B_N \xrightarrow[N \to \infty]{\text{一致}} B = TV - VT$，故$B$是紧线性算子。如果令$\delta_n = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^{(n)} f_j + g_n$，其

中$g_n \in H_2$，因为$(\delta_n, f_n)=0$，故$\beta_n^{(n)}=0$，$V\delta_n=\sum_{j\neq n}\beta_j^{(n)}f_{j+1}$，从而$(V\delta_n, f_{n+1})=0$，$((TV-VT)f_n, f_{n+1})=(\mu_{n+1}-\mu_n)$，现设$B=TW-WT$，$W\in\mathscr{B}(H)$，则

$$((TW-WT)f_n, f_{n+1})=(\mu_{n+1}-\mu_n)(Wf_n, f_{n+1})+(Wf_n, \gamma_{n+1})-(W\delta_n, f_{n+1})=(Bf_n, f_{n+1})=(\mu_{n+1}-\mu_n) \tag{10}$$

容易证明，n充分大后，$|\mu_{n+1}-\mu_n|>0$，且$\dfrac{\varepsilon_n}{\mu_{n+1}-\mu_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$，(10)式两边同除$(\mu_{n+1}-\mu_n)$，让$n\to\infty$便得

$$(Wf_n, f_{n+1})\longrightarrow 1 \qquad (n\to\infty) \tag{11}$$

故W非紧，即$B\notin\Delta_T(K)$，$R(\Delta_T)\cap K\neq\Delta_T(K)$，

如果$\partial\sigma(T)$有无穷有限重孤立特征值序列$\{\lambda_n\}$，则据命题3以及上面的证明也可得$R(\Delta_T)\cap K\neq\Delta_T(K)$，故若$R(\Delta_T)\cap K=\Delta_T(K)$，必有$\sigma(T)$有限.

定理6 设$T\in\theta$，则$R(\Delta_T)$按算子范数闭的充分必要条件是$\sigma(T)$有限，

证明 据〔3〕定理2.5，若$R(\Delta_T)$闭，则T一定是一个代数算子，即存在多项式$p(\lambda)$，使$P(T)=0$，故$\sigma(T)$有限。反之，若$\sigma(T)$有限，则T为正常算子，$R(\Delta_T)$必闭。

附注 容易证明$R(\Delta_T)$闭等价于$R(\Delta_{T^*})$闭，$R(\Delta_T)\cap K=\Delta_T(K)$也等价于$R(\Delta_{T^*})\cap K=\Delta_{T^*}(K)$，故$T^*\in\theta$时，定理5，6的结论仍然成立，

利用引理1的证明方法和命题3我们还可以证明θ-类算子的谱具有亚正常算子的许多相同性质。

定理7 设$T\in\theta$，则下面的结论成立：

(i) 若$\lambda\in\partial\sigma(T)$，则$|\lambda|\in\sigma((T^*T)^{\frac{1}{2}})\cap\sigma((TT^*)^{\frac{1}{2}})$；(ii) 若$T$完全非正常，$\lambda\in\partial\sigma(T)$，则$|\lambda|\in\sigma_{L_e}((T^*T)^{\frac{1}{2}})\cap\sigma_{L_e}((TT^*)^{\frac{1}{2}})$；(iii)若$T$非正常，则$0\in\sigma_{L_e}([T^*, T])$，

证明 (i) 因为$\lambda\in\partial\sigma(T)$，则存在单位向量$\{x_n\}\subset H$，使$(T-\lambda I)x_n\to 0$，利用引理1的证明方法可得$(T^*-\bar{\lambda}I)x_n\to 0$，于是$(T^*T-|\lambda|^2I)x_n\longrightarrow 0$，$(TT^*-|\lambda|^2I)x_n\longrightarrow 0$，由此容易证明$((T^*T)^{\frac{1}{2}}-|\lambda|I)x_n\longrightarrow 0$，$((TT^*)^{\frac{1}{2}}-|\lambda|I)x_n\longrightarrow 0$，故$|\lambda|\in\sigma((T^*T)^{\frac{1}{2}})\cap\sigma((TT^*)^{\frac{1}{2}})$，

(ii) 设T完全非正常，若λ是$\sigma(T)$的孤立点，则据〔5〕定理5可得λ是T的约化特征值，再由命题3，当$x\in N(\lambda-T)$时，$T^*Tx=TT^*x=|\lambda|^2x$，这与T完全非正常矛盾，故λ不可能是$\sigma(T)$的孤立点，于是据〔8〕定理3.3，在(i)的证明中可取$\{x_n\}$为标准直交序列，从而$|\lambda|\in\sigma_{L_e}((T^*T)^{\frac{1}{2}})\cap\sigma_{L_e}((TT^*)^{\frac{1}{2}})$，

(iii) 首先由〔5〕推论3，我们可不妨设T完全非正常，则存在$\lambda_0\in\partial\sigma(T)$，$\lambda_0$为$\sigma(T)$的非孤立点，于是存在标准直交序列$\{x_n\}\subset H$，使$(T-\lambda_0 I)x_n\longrightarrow 0$和$(T^*-\bar{\lambda}_0 I)x_n\longrightarrow 0$，但$[T^*, T]=[T^*-\bar{\lambda}_0, T-\lambda_0]$，故$[T^*, T]x_n\longrightarrow 0$，$0\in\sigma_{L_e}([T^*, T])$，

定理8 设$T\in\theta$，$\lambda\in\sigma(T)$，且$\bar{\lambda}\notin\sigma_p(T^*)$，则$|\lambda|\in\sigma_{L_e}((T^*T)^{\frac{1}{2}})\cap\sigma_{L_e}((TT^*)^{\frac{1}{2}})$，

证明 令$T_\lambda = T - \lambda I$，$T^*_\lambda = T^* - \bar{\lambda} I$，因为$\bar{\lambda} \notin \sigma_p(T^*)$，由命题3知$\lambda \notin \sigma_p(T)$，故$(T - \lambda I)$和$(T^* - \bar{\lambda} I)$的左逆存在，又因为$\lambda \in \sigma(T)$，我们容易证明$0 \in \sigma(T_\lambda T^*_\lambda) \cap \sigma(T^*_\lambda T_\lambda)$，但显然有$0 \notin \sigma_p(T^*_\lambda T_\lambda) \cap \sigma_p(T_\lambda T^*_\lambda)$，而$T^*_\lambda T_\lambda$、$T_\lambda T^*_\lambda$的是正算子，按〔8〕定理3.3，必有$0 \in \sigma_{L_e}((T^*_\lambda T_\lambda)) \cap \sigma_{L_e}((T_\lambda T^*_\lambda))$，从而存在标准直交序列$\{x_n\} \subset$ H，使$T_\lambda x_n \to 0$，再利用引理1的证明方法可得对同一个序列$\{x_n\}$、有$T^*_\lambda x_n \to 0$，则与定理7（i）证明相同可得$|\lambda| \in \sigma_{L_e}((T^*T)^{\frac{1}{2}}) \cap \sigma_{L_e}(TT^*)^{\frac{1}{2}})$。

定理9 设$T \in \theta$，T有极分解$T = UP$，其中U为酉算子，P为正算子，令$\lambda \neq 0$，$\lambda \in \sigma(T)$，$\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$，则$e^{i\theta} \in \sigma(U)$。

证明 令$\lambda_1 = re^{i\theta}$，其中$r = \max\{|\lambda| : \lambda = |\lambda| e^{i\theta},\ \lambda \in \sigma(T)\}$，由条件知$r > 0$，显然$\lambda_1 \in \partial\sigma(T)$，由定理7（i），存在单位向量$\{x_n\} \subset$ H，使

$$(T - \lambda_1 I) x_n \to 0, \quad (T^* - \bar{\lambda}_1 I) x_n \to 0 \tag{12}$$

以及

$$((T^*T)^{\frac{1}{2}} - rI) x_n \to 0, \ ((TT^*)^{\frac{1}{2}} - rI) x_n \to 0, \tag{13}$$

因为$T = UP$，则$T^* = PU^*$，$T^*T = P^2$，$P = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$，于是

$$(U(T^*T)^{\frac{1}{2}} - re^{i\theta}) x_n) \longrightarrow 0 \tag{14}$$

则由（13）、（14）可得

$$r(Ux_n - e^{i\theta} x_n) \longrightarrow 0 \tag{15}$$

由于$r > 0$，故$(U - e^{i\theta}) x_n \longrightarrow 0$，$e^{i\theta} \in \sigma(U)$

定理10 多项式紧致的θ-类算子是对角形的。

证明 设$T \in \theta$，且存在多项式$p(\lambda)$，使$p(T)$为紧算子，则$\sigma(T)$只能以$\{p(\lambda) = 0,\ \lambda \in \sigma(T)\}$的根为聚点，除去这些点之外，$\sigma(T)$中的点都是孤立点，由〔5〕定理5及命题3，孤立点是T的约化特征值，且对应于不同特征值的特征向量彼此正交。我们记由孤立点相应的特征向量张成的空间为H$_1$，则H$_1$约化T，$T|_{H_1^\perp}$仍是θ-类算子，且$\sigma(T|_{H_1^\perp}) = \{\lambda : \lambda \in \sigma(T),\ p(\lambda) = 0\}$必为有限集，它们是$\sigma(T/_{H_1^\perp})$的孤立点，故是$T|_{H_1^\perp}$的特征值，且不同的特征值所对应的特征向量彼此正交，易知，相应的特征向量张成H$_1^\perp$，从而T的所有特征向量组成H的一个正规正交基，即T是对角形的。

下面我们设$T = k + iJ$，其中$k = \dfrac{T + T^*}{2}$，$J = \dfrac{T - T^*}{2i}$，Putnam〔10〕证明了若T亚正常，$x_0 + iy_0 \in \sigma(T)$，则$x_0 \in \sigma(K)$，$y_0 \in \sigma(J)$，我们可以证明θ-类算子也有同样的结论。

定理11 设$T = K + iJ \in \theta$，$x_0 + iy_0 \in \sigma(T)$，则$x_0 \in \sigma(K)$，$y_0 \in \sigma(J)$。

证明 若$z = x_0 + iy_0 \in \partial\sigma(T)$，则存在单位向量$\{x_n\} \subset$ H，使$T_z x_n \longrightarrow 0$，利用引理1的证明方法可得$T^*_z x_n \longrightarrow 0$，因为$[T^*_z T] = [T^*_z, T_z]$，故$[T^*, T] x_n \longrightarrow 0$，又因为

$$T^*_z T_z = (K - x_0 I)^2 + (J - y_0 I)^2 + \frac{1}{2}[T^*_z T]$$

利用$(T^*_z T_z x_n, x_n) \to 0$和$[T^*, T] x_n \to 0$可推出

$$(K - x_0 I) x_n \to 0 \quad (J - y_0 I) x_n \to 0$$

所以$x_0 \in \sigma(K)$，$y_0 \in \sigma(J)$。

如果$z = x_0 + iy_0$是$\sigma(T)$的内点，则令$y_0' = \max\{y : z = x_0 + iy \in \sigma(T)\}$，显然$z' =$

$x_0+iy_0\in\partial\sigma(T)$，由上面所证可知$x_0\in\sigma(K)$，类似地可证明$y_0\in\sigma(J)$

推论12 设$T\in\theta$，则$\sigma(\mathrm{Re}T)=\mathrm{Re}\sigma(T)$

证明 令C为（2）式所定义的正常算子，则$T^*+T=C^*+C$，$\sigma(c)\cup\sigma(c^*)\subset\sigma(T)\cup\sigma(T^*)$，由此可得

$$\sigma(K)=\sigma(\mathrm{Re}C)=\mathrm{Re}\sigma(c)\subset\mathrm{Re}\sigma(T)$$

故$\sigma(\mathrm{Re}T)=\mathrm{Re}\sigma(T)$

显然，如果$T\in\theta$，且$iT\in\theta$，则$\sigma(K)=\mathrm{Re}\sigma(T)$，$\sigma(J)=\mathrm{Im}\,\sigma(T)$同时成立，一般情况下，对于$\theta$-类算子$\sigma(J)=\mathrm{Im}\,\sigma(T)$是否成立尚未解决

参考文献

〔1〕C. Apostol、J.G. Stampfli, Indiana univ Math.J., 25 (1976), 857—869.
〔2〕J.G. Stampfli. Proc.Amer.Math.Soc., 52 (1975), 117—120.
〔3〕C. Apostol, Rev.Roumaine. Math.pures.Appl., 21 (1976), 249—265.
〔4〕S.L.Campbell. pacific. J. Math., 61 (1975), 53—57.
〔5〕S.L.Campbell. Relph.Gellar., Proc.Amer. Math.Soc., 60 (1976), 197—202.
〔6〕宋国柱. θ-类算子的几个性质.
〔7〕J.G. Stampfli J.London.Math.Soc., 9 (1974), 165—175.
〔8〕P.A. Fillmore. J.G. Stampfli. J.P. Williams, Acta.Sci.Math., 33 (1972), 179.—192.
〔9〕C. R. putnan Trans.Amer.Math.Soc., 188 (1974), 419—428.
〔10〕C. R. putnam Trans. Amer.Math.Soc., 119 (1965), 509—523.