论V、I、Arnold问题
——一类高次奇点的稳定性判别准则

刘 南 根
（湖南大学）

本文研究平面n次多项式微分系统的李雅普诺夫奇点的稳定性，提出有限次运算的判别定理．本文还列出矩阵算法的稳定性判别准则．解决了李雅普诺夫情况的Arnold问题．（文〔1〕,〔2〕,〔3〕）

§1．李雅普诺夫奇点的有限次判别定理

假设平面n次多项式微分系统：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=X(x,y)=ax+by+\phi(x,y)\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=Y(x,y)=cx+dy+\psi(x,y)\end{cases}\tag{1}$$

其中$X(x,y)$、$Y(x,y)$为二元n次实系数多项式，$\phi(x,y)$，$\psi(x,y)$为高于一次的各项总和，形式为：

$$\phi(x,y)=\sum_{k=2}^{n}(\alpha_{k_0}x^k+\alpha_{k1}x^{k-1}y+\cdots+\alpha_{kk}y^k)$$

$$\psi(x,y)=\sum_{k=2}^{n}(\beta_{k_0}x^k+\beta_{k1}x^{k-1}y+\cdots+\beta_{kk}y^k)\tag{2}$$

满足条件

$$p=-(a+d)\neq 0,\quad q=ad-bc=0.\tag{3}$$

根据古典的李雅普诺夫理论（见文〔4〕），必须把系统（1）化为简化的系统：

$$\frac{dx}{dt}=\mathrm{X}(x,z)=\phi(x,z)\tag{4}$$

$$\frac{dz}{dt}=Y(x,z)=Ax+By+\psi(x,z),\quad B<0.$$

其中$\phi(x,z)$、$\psi(x,z)$和（2）具有相同的形式．

令 $Ax+\mathrm{B}y+\psi(x,z)=0$ （5）

利用隐函数定理从（5）式中解出$z=u(x)$，，满足$u(0)=0$．

再令 $X(x,u(x))=\phi(x,u(x))=Z(x)$

把$Z(x)$在原点附近展开成幂级数：

*1983年10月19日收到．

$$Z(x)=E_1x+E_2x^2+\cdots+E_nx^n+\cdots, \tag{6}$$

则有如下判别法：

i）如果$Z(x)\equiv 0$，则系统（4）在$z=u(x)$上充满奇点，它的零解是稳定而非渐近稳定；

ii）如果$Z(x)\equiv 0$，$Z(x)=E_mx^m+o(x^{m+1})$，则a）当E_mx^{m+1}负定时，系统（4）的零解是渐近稳定，b）当E_mx^{m+1}非负定时，系统（4）的零解是不稳定。

一般可用辗转相除法，结式来确定$Z(x)\equiv 0$，或者用ii）的方法，无限次运算下去，得到$Z(x)$的展开式的所有系统均为0。可见判别$Z(x)\equiv 0$是相当困难的。

本节将证明下面定理：

定理1 如果$Z(x)$的展开式（6）中，有$E_1=E_2=\cdots=E_{n^2}=0$，那末$Z(x)\equiv 0$。

这样，我们可以采用逐次确定E_1，E_2，$\cdots E_{n^2}$的方法来确定$Z(x)\equiv 0$。即通过有限次运算便能判别系统（4）的零解的稳定性。为了证明定理1，我们首先证明下面引理。

引理 如果二元n次实系数多项式$Z(x,z)$ $Y(x,z)$互质，则存在实系数多项式$\phi(x)\not\equiv 0$和二元实系数多项式$\lambda_1(x,z)$和$\lambda_2(x,z)$，使得

$$\lambda_1(x,z)X(x,z)+\lambda_2(x,z)Y(x,z)=\varphi(x), \tag{7}$$

并且$\phi(x)$的次数不超过n^2。

证 把$X(x,z)$，$Y(x,z)$看作z的单变元多次式，设

$$X(x,z)=\varphi_0(x)z^n+\varphi_1(x)z^{n-1}+\cdots+\varphi_n(x)\quad \varphi_0(x)\not\equiv 0;$$

$$Y(x,z)=\psi_0(x)z^n+\psi_1(x)z^{n-1}+\cdots+\psi_n(x)\quad \psi_0(x)\not\equiv 0,$$

其中$\varphi_i(x)$，$\psi_i(x)$，$i=1,2,\cdots$，n为次数不超过n的x的实系数多项式。

根据二元多项式理论，当$X(x,z)$，$Y(x,z)$互质时，结式

$$R_z(X,Y)=\begin{vmatrix} \varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\cdots\cdots\varphi_n(x) & & & \\ & \varphi_0(x)\cdots\cdots\varphi_{n-1}(x)\,\varphi_n(x) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\cdots\cdots\cdots\cdots & \varphi_n(x) \\ \psi_0(x)\,\psi_1(x)\cdots\cdots\psi_n(x) & & & \\ & \psi_0(x)\cdots\cdots\psi_{n-1}(x)\,\psi_n(x) & \ddots & \\ & & \psi_0(x)\,\psi_1(x)\cdots\cdots\cdots\cdots & \psi_n(x) \end{vmatrix}=\varphi(x)\not\equiv 0, \tag{8}$$

且$\varphi(x)$的次数不超过n^2。（见文〔5〕，第七章p280—286）

分别用z^{2n-1}，z^{2n-2}，$\cdots$，z乘行列式（8）中的第一列，第二列，$\cdots$第$2n-1$列后加到第$2n$列：

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\cdots\cdots\varphi_n(x) & & z^{n-1}X(x,z) \\ \quad\varphi_0(x)\cdots\cdots\varphi_{n-1}(x)\,\varphi_n(x) & & z^{n-2}X(x,z) \\ & & \vdots \\ \qquad\varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\cdots\cdots & & X(x,z) \\ \psi_0(x)\,\psi_1(x)\,\psi_0\cdots\cdots\psi_n(x) & & z^{n-1}Y(x,z) \\ \quad\psi_0(x)\cdots\cdots\psi_{n-1}(x)\,\psi_n(x) & & z^{n-2}Y(x,z) \\ & & \vdots \\ \qquad\psi_0(x)\,\psi_1(x)\cdots\cdots\cdots\cdots & & Y(x,z) \end{vmatrix}=\varphi(x) \tag{9}$$

按第 2 n 列把（9）式展开便得关系式（7）．引理证完．

注 如果$\varphi_0(x)$、$\psi_0(x)$之中有一个恒为零，用上述证明同样证得引理．

证定理 1 如果$E_1 = E_2 = \cdots = E_{n^2} = 0$，则$X(x, z)$与$Y(x, z)$必有公因子．不然的话，根据引理，存在着$\varphi(x) \not\equiv 0$和$\lambda_1(x, z)$，$\lambda_2(x, z)$，使得

$$\lambda_1(x, z) X(x, z) + \lambda_2(x, z) Y(x, z) = \varphi(x).$$

把$z = u(x)$及$Z(x)$的展开式（6）代入得

$$\lambda_1(x, u(x))(E_{n^2+1} x^{n^2+1} + E_{n^2+2} x^{n^2+2} + \cdots) = \varphi(x).$$

上式中，左端是高于n^2次的项之和，而右端，根据引理，最高次不超过n^2，所以是矛盾的．

设$d(x, z)$为$X(x, z)$，$Y(x, z)$的最高公因，且

$$X(x, z) = X_1(x, z) d(x, z),\quad Y(x, z) = Y_1(x, z) d(x, z),$$

其中$X_1(x, z)$，$Y_1(x, z)$互质，次数低于n．在定理 1 的条件下，$d(0,0) = 0$．否则便有$d(0,0) = \delta \neq 0$，在原点的邻域内$d(x, z) \neq 0$，且含常数项δ．根据引理，存在$\bar{\lambda}_1(x, z)$，$\bar{\lambda}_2(x, z)$，$\bar{\varphi}(x)$，使得

$$\bar{\lambda}_1(x, z) X_1(x, z) + \bar{\lambda}_2(x, z) Y_1(x, z) = \bar{\varphi}(x) \tag{10}$$

$\bar{\varphi}(x)$的次数不超过$(n-1)^2$．用$d(x, z)$乘（10）式两端得

$$\bar{\lambda}_1(x, z) X(x, z) + \bar{\lambda}_2(x, z) Y(x, z) = \bar{\varphi}(x) d(x, z)$$

把$z = u(x)$和$Z(x)$的展开式（6）代入上式得

$$\bar{\lambda}_1(x, u(x))(E_{n^2+1} x^{n^2+1} + E_{n^2+2} x^{n^2+2} + \cdots) = \bar{\varphi}(x) d(x, u(x)).$$

上式中，左端的首项必为高于n^2次的x幂，而右端的首项x的幂的次数不超过$(n-1)^2$．这是矛盾的．

又$Y(x, z)$含一次项，由$d(0, 0) = 0$推知$Y_1(0, 0) = \delta \neq 0$．说明$z = u(x)$只能是$d(x, z) = 0$的隐函数解．所以系统（4）在$z = u(x)$上充满奇点，即$Z(x) \equiv 0$．定理 1 证完．

§2 稳定性的判别算法

为了得到简单易行的矩阵乘法的稳定性判别算法，我们作辅助多项式：

$$Y^*(x, y) = kX(x, y) + Y(x, y) \tag{11}$$

其中

$$k = \begin{cases} \dfrac{a}{b}, & \text{当 } b \neq 0 \text{ 时；} \\ \infty & \text{当 } b = 0,\ a \neq 0 \text{ 时；} \\ 0 & \text{当 } b = a = 0 \text{ 时；} \end{cases} \tag{12}$$

当k为∞时，规定$Y^*(x, y) = X(y, x)$．

再设$y = u(x)$为$Y^*(x, y) = 0$的隐函数解，且满足$u(0) = 0$．我们有如下判别定理．

定理 2 假设系统（1）满足条件$p > 0$，$q = 0$，那末：

i）当$k \neq \infty$时，

$$xX(x, u(x)) \begin{cases} \equiv 0, & \text{系统（1）的零解为稳定而非渐近稳定；} \\ \text{负定}, & \text{系统（1）的零解为渐近稳定；} \\ \text{非负定}, & \text{系统（1）的零解为不稳定．} \end{cases}$$

ii）当$k=\infty$时.(即$b=d=0$；$a<0$）

$$xY(x,u(x))\begin{cases}\equiv 0. & \text{系统（1）的零解为稳定而非渐近稳定;}\\ \text{负定,} & \text{系统（1）的零解为渐近稳定;}\\ \text{非负定,} & \text{系统（1）的零解为不稳定.}\end{cases}$$

证 （A）当$k=0$，即$b=a=0$，已在§1中讨论过.

（B）当$k=\frac{a}{b}$，即$b\neq 0$，作变换：

$$\begin{cases}\bar{x}=y-\dfrac{d}{b}x,\\ \bar{y}=y+\dfrac{a}{b}x,\end{cases}\quad \text{或者}\quad \begin{cases}x=\dfrac{b}{a+d}(\bar{y}-\bar{x}),\\ y=\dfrac{1}{a+d}(d\bar{y}+a\bar{x}).\end{cases}\tag{13}$$

把系统（1）变换为

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{dt}&=\widetilde{X}^*(\bar{x},\bar{y})=\varphi^*(\bar{x},\bar{y})\\ \frac{d\bar{y}}{dt}&=\widetilde{Y}^*(\bar{x},\bar{y})=(a+d)\bar{y}+\psi^*(\bar{x},\bar{y}),\end{aligned}\tag{14}$$

其中$\varphi^*(\bar{x},\bar{y})$、$\psi^*(\bar{x},\bar{y})$和（2）式具有相同形式．同时（14）式的右端还具有关系：

$$\widetilde{X}^*(\bar{x},\bar{y})=Y(x,y)-\frac{d}{b}X(x,y),$$

$$\widetilde{Y}^*(\bar{x},\bar{y})=Y(x,y)+\frac{a}{b}X(x,y)=Y^*(x,y).$$

（$Y^*(x,y)$为系统（1）的辅助多项式.）令

$$(a+d)\bar{y}+\psi^*(\bar{x},\bar{y})=\widetilde{Y}^*(\bar{x},\bar{y})=0.$$

根据隐函数定理解出$\bar{y}=u(\bar{x})$，满足$\widetilde{Y}^*(\bar{x},v(x))\equiv 0$，$v(0)=0$，$v'(0)=0$．把$\bar{y}=v(x)$在原点附近展开成

$$v(\bar{x})=h\bar{x}^s+o(x^{s+1}),\quad s\geq 2.$$

根据（A），以及系统（14），（1）之间的关系得：

$$\bar{x}\widetilde{X}^*(\bar{x},\bar{y})\begin{cases}\equiv 0, & \text{系统（1）的零解为稳定而非渐近稳定;}\\ \text{负定,} & \text{系统（1）的零解为渐近稳定;}\\ \text{非负定,} & \text{系统（1）的零解为不稳定.}\end{cases}$$

由于 $$\widetilde{X}^*(\bar{x},v(\bar{x}))=Y(x,u(x))-\frac{d}{b}X(x,u(x)),$$

$$\widetilde{Y}^*(\bar{x},v(\bar{x}))=Y^*(x,u(x))=Y(x,u(x))+\frac{a}{b}X(x,u(x))\equiv 0.$$

把上面两式相减得

$$\widetilde{X}^*(\bar{x},v(\bar{x}))=-\frac{a+d}{b}X(x,u(x)).$$

所以有下面关系式成立：

$$x X(x, u(x)) = \frac{b^2}{(a+d)^2}(\bar{x} - v(\bar{x}))\tilde{X}^*(x, v(\bar{x})).$$

考虑到$v(\bar{x}) = h\bar{x}^s + o(\bar{x}^{s-1})$，$s \geq 2$．可见条件："$xX(x, u(x))$ 为负定，非负定或恒等于零"．与条件："$\bar{x}\tilde{X}^*(\bar{x}, v(\bar{x}))$ 为负定，非负定或恒等于零"是等价的．所以定理 2 的 i）在 $b \neq 0$ 时成立．

（c）当 $k = \infty$，即 $b = 0$，$a \neq 0$ 时，作变换：$\bar{x} = y$，$\bar{y} = x$．不失一般性，我们仍用 x 记 $\bar{x}$，y 记 $\bar{y}$．系统（1）化为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cy - \psi(y, x) = Y(y, x), \\ \frac{dy}{dx} &= ay + \varphi(y, x) = X(y, x) = Y^*(x, y). \end{aligned} \tag{15}$$

当 $c = 0$ 已在（A）中讨论过，当 $c \neq 0$ 已在（B）中讨论过．定理 2 的ii）成立．到此定理全部证完．

下面研究稳定性判别准则的矩阵算法．

设辅助多项式（11）$Y^*(x, y)$ 的形式是

$$Y^*(x, y) = \sum_{k=1}^{n}(r_{k0}x^k + r_{k1}x^{k-1}y + \cdots + r_{kk}y^k) \tag{16}$$

$Y^*(x, y) = 0$ 过（0，0）的解 $y = u(x)$ 展开成幂级数形式是

$$y = u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_m x^m + \cdots \tag{17}$$

把（17）式代入$Y^*(x, y) = 0$，比较同次幂的系数得：

$$r_{10} + r_{11}u_1 = 0$$

$$r_{20} + r_{21}u_1 + r_{22}u_1^2 + r_{33}u_1^3 + r_{11}u_2 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{n0} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} r_{ij}\Big[\sum_{\substack{s_1 + s_2 + \cdots + s_n = j \\ s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n + (i-j) = n}} \delta(s_1, s_2, \cdots, s_n)u_1^{s_1}u_2^{s_2}\cdots u_n^{s_n}\Big] = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} r_{ij}\Big[\sum_{\substack{s_1 + s_2 + \cdots + s_{n^2} = j \\ s_1 + 2s_2 + \cdots + n^2 s_{n^2} + (i-j) = n^2}} \delta(s_1, s_2, \cdots, s_{n^2})u_1^{s_1}u_2^{s_2}\cdots u_{n^2}^{s_{n^2}}\Big] = 0$$

其中$s_1, s_2, \cdots s_m$可以为零．令 $0! = 1$，定义

$$\delta(s_1, s_2, \cdots, s_m) = \frac{(s_1 + s_2 + \cdots + s_m)!}{s_1! \cdot s_2! \cdots s_m!} \tag{18}$$

写成向量和矩阵的运算形式是

$$\begin{bmatrix} r_{10} \\ r_{20} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & & \\ r_{21} + r_{22}u_1 & r_{11} & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\Big[\sum_{\substack{s_1 + \cdots + s_l = j \\ s_1 + 2s_2 + \cdots + ls_l + (i-j) = n^2}} \delta(s_1, s_2, \cdots, s_l)u_1^{s_1}u_2^{s_2}\cdots u_l^{s_l}\Big] & r_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

用$P(p_{kl}, Y^*)$ 表示（19）式中$n^2 \times n^2$ 阶矩阵，其中

$$p_{kl}=\begin{cases}0, & \text{当}k<l\text{时;}\\ r_{11}, & \text{当}k=l\text{时;}\\ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}\Big[\sum_{\substack{s_1+s_2+\cdots+s_l=j,\ s_l\neq 0\\ s_1+2s_2+\cdots+ls_l+(i-j)=k}}\delta(s_1,s_2,\cdots,s_l)u_1^{s_1}u_2^{s_2}\cdots u_l^{s_l-1}\Big], & \text{当}k>l\text{时.}\end{cases} \tag{20}$$

再用向量 $\vec{R}$，$\vec{U}$，$\vec{Q}$表示n^2元列向量：

$$(r_{10}r_{20}\cdots r_{n0}\ 0\cdots 0)^T,\quad (u_1u_2\cdots u_{n^2})^T,\quad (0\ 0\cdots 0)^T.$$

这样（19）式改写为

$$\vec{R}+P(p_{kl},Y \qquad \vec{\ }=\vec{\ }$$

从定理3的证明中知道，辅助多项式的$r_{11}\neq 0$，即$P(p_{kl},Y^*)$是非奇异的三角矩阵。它具有逆阵，记$P(p_{kl},Y^*)$的逆阵为$P^{-1}(p_{kl},Y^*)$。所以

$$\vec{U}=P^{-1}(p_{kl},Y^*)(-\vec{R}). \tag{22}$$

（很容易推知$P^{-1}(p_{kl},Y^*)$的每个元素$p_{kl}=-\frac{1}{r_{11}}p_{kl}$。）

由于在$P(p_{kl},Y^*)$的第k行中不会出现标号大于或等于k的u_m，所以可以从（22）式中确定$u_1,u_2,\cdots u_{n^2}$，也就是说$P^{-1}(p_{kl},Y^*)$是已知的。

先考虑$k\neq\infty$情况，把$X(x,u(\ (x))$展开成幂级数

$$X(x,u(x))=E_1x+E_2x^2+\cdots+E_{n^2}x^{n^2}+\cdots \tag{23}$$

把$y=u(x)$的展开式（17）代入（23）式的左端，比较同次幂的系数，而且只计算前面n^2个项，有

$$\vec{E}=P(p_{kl},X(x,y))\vec{U}+\vec{a}. \tag{24}$$

其中$\mathrm{E}=(\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2\cdots\mathrm{E}_{n^2})^{\mathrm{T}}$，$\vec{a}=(a_{10}a_{20}\cdots a_{n0}\ 0\cdots 0)^{\mathrm{T}}$，矩阵$P(p_{kl},X(x,y))$和（20）式中的矩阵$P(p_{kl},Y^*)$有相同的形式，不同的只是把$X(x,y)$的系数$a_{ij}$代替（20）式中的$r_{ij}$。

最后，我们得到矩阵算法：

$$\vec{E}=P(p_{kl},X(x,y))P^{-1}(p_{kl},Y^*)(-\vec{R})+\vec{a}. \tag{25}$$

同理可得$k=\infty$时的矩阵算法：

$$\vec{E}=P(p_{kl},Y(y,x))P^{-1}(p_{kl},Y^*)(-\vec{R})+\vec{\beta}. \tag{26}$$

其中$\vec{\beta}=(\beta_{11}\beta_{22}\cdots\beta_{nn}\ 0\cdots 0)^{\mathrm{T}}$，$P(p_{kl},Y(y,x))$亦和$P(p_{kl},Y^*)$具有相同形式。不同的只是用$\beta_{i(i-j)}$代替（20）中的$r_{ij}$。

因为我们的目的只是计算第一个非零的E_m，所以可先求u_1，后求E_1，当$\mathrm{E}_1=0$时，再来求u_1和u_2，……这样交叉进行，直至出现第一个非零的E_m，或者所有的E_1、E_2、…，E_m均为零。

总结 关于$p\neq 0$，$q=0$一类高次奇点的Arnold问题，由下表给出系统（1）的零解的稳定性判别准则。

$$a+d=0\begin{cases}a+d>0，\text{不稳定；}\\ a+d<0\begin{cases}\mathrm{E}_1=\cdots\mathrm{E}_{m-1}=0，\ \mathrm{E}_m\neq 0\begin{cases}m\text{为偶数，不稳定；}\\ m\text{为奇数}\begin{cases}E_m>0，\text{不稳定；}\\ E_m<0，\text{渐近稳定；}\end{cases}\end{cases}\\ E_1=E_2=\cdots E_{n^2}=0，\text{稳定而非渐近稳定。}\end{cases}\end{cases}$$

§3 n = 3的例子

考虑平面三次多项式微分系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=X(x,y)=ax+by+a_{20}x^2+a_{21}xy+a_{22}y^2+a_{30}x^3+a_{31}x^2y+a_{32}y^2+a_{33}y^3 \\ \dfrac{dy}{dt}=Y(x,y)=(x+dy+\beta_{20}x^3+\beta_{21}xy+\beta_{22}y^2+\beta_{30}x^3-\beta_{31}x^2y+\beta_{32}xy^2+\beta_{33}y^3\end{cases} \tag{27}$$

满足条件$p=-(a+d)\neq 0$, $q=ad-bc=0$.

通过矩阵与向量运算找出第一个非零的E_m, 或者所有的E_1、E_2, …, E_q均为0. 则系统(30)的零解的稳定性有下表给出:

$$p\neq 0\begin{cases} a+d>0, \text{不稳定;} \\ a-d<0\begin{cases}\begin{matrix}E_1=\cdots=E_{m-1}=0 \\ E_m\neq 0, \ m<9\end{matrix}\begin{cases} m\text{为偶数} \quad \text{不稳定;} \\ m\text{为奇数}\begin{cases}E_m>0, \text{不稳定;} \\ E_m<0, \text{渐近稳定;}\end{cases}\end{cases} \\ E_1=E_2=\cdots E_9=0, \text{稳定而非渐近稳定.}\end{cases}\end{cases}$$

$\vec{E}=(E_1E_2\cdots E_9)^T$由下列运算得到:

i) $b\neq 0$, $\vec{E}=P(p_{kl},X(x,y))P^{-1}(p_{kl},Y^*)(-\vec{R})+\vec{a}$, 其中$\vec{R}=(\dfrac{a(a+d)}{b},\beta_{20}+\dfrac{a}{b}a_{20},\beta_{30}+\dfrac{a}{b}a_{30},0,\cdots,0)^T$, $\vec{a}=(a,a_{20},a_{30},0\cdots0)^T$;

ii) b = 0, $a\neq 0$, $\vec{E}=P(p_{kl},Y(y,x))P^{-1}(p_{kl},Y^*)(-\vec{a})+\vec{\beta}$, 其中$\vec{a}=(0,a_{22},a_{33},0\cdots0)^T$, $\vec{\beta}=(0,\beta_{22},\beta_{33},0\cdots0)^T$;

iii) $b=a=0$, $\vec{E}=P(p_{kl},X(x,y))P^{-1}(p_{kl},Y^*)(-\vec{\beta})+\vec{a}$, 其中$\vec{\beta}=(c,\beta_{20},\beta_{30},0\cdots0)^T$, $\vec{a}=(0,a_{20},a_{30},0,\cdots0)^T$.

设辅助多项式$Y^*(x,y)$是

$$r_{10}x+r_{11}y+r_{20}x^2+r_{21}xy+r_{22}y^2+r_{30}x^3+r_{31}x^2y+r_{32}xy^2+r_{33}y^3, \quad r_{10}=0.$$

分三类确定r_{ij}的值: i) $b\neq 0$, $\begin{cases}r_{11}=a+d \\ r_{ij}=\beta_{ij}+\dfrac{a}{b}a_{ij};\end{cases}$

ii) $b=0$, $a\neq 0$, $\begin{cases}r_{11}=a \\ r_{ij}=a_i(i-j);\end{cases}$ iii) $b=a=0$, $\begin{cases}r_{11}=d. \\ r_{ij}=\beta_{ij}.\end{cases}$

其中$i=2,3$; $j=1,2,3$; $i\geq j$.

矩阵$P(p_{kl},Y^*)$是(见文末).

把该矩阵(28)稍加变化便可得到矩阵$P^{-1}(p_{kl},Y^*)$, $P(p_{kl},Y(y,x))$和$P(p_{kl},X(x,y))$. 在矩阵(28)式中, 令$r_{ij}=\dfrac{1}{r_{11}}$, $r_{ij}=-\dfrac{1}{r_{11}}r_{ij}$便给出矩阵$P^{-1}(p_{kl},Y^*)$; 令$r_{ij}=\beta_i(i-j)$便得到矩阵$P(p_{kl},Y(y,x))$; 令$r_{ij}=a_{ij}$便给出矩阵$P(p_{kl},X(x,y))$. 这里$i=2,3,j=1,2,3,i\geq j$.

参考文献

〔1〕V.I.Arnold.Proceeding of sumposium pure mathematics. Vol.28. America Mathematicl Society (1976).

$$
\begin{pmatrix}
Y_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
Y_{21}+Y_{22}u_1 & Y_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
Y_{31}+Y_{32}u_1-Y_{33}u_1^2 & Y_{21}+2Y_{22}u_1 & Y_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \begin{matrix} Y_{31}+2Y_{32}u_1+ \\ 3Y_{33}u_1^2+Y_{22}u_2 \end{matrix} & Y_{21}+2Y_{22}u_1 & Y_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & (Y_{32}+3Y_{33}u_1)u_2 & \begin{matrix} Y_{31}+2Y_{32}u_1+ \\ 3Y_{33}u_1^2+2Y_{22}u_2 \end{matrix} & Y_{21}+2Y_{22}u_1 & Y_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & Y_{33}u_2^2 & \begin{matrix} (2Y_{32}+6Y_{33}u_1)u_2 \\ +Y_{22}u_3 \end{matrix} & \begin{matrix} Y_{31}+2Y_{32}u_1+ \\ 3Y_{33}u_1^2+2Y_{22}u_2 \end{matrix} & Y_{21}+2Y_{22}u_1 & Y_{11} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \begin{matrix} (Y_{32}+3Y_{33}u_1)u_3 \\ +3Y_{33}u_2^2 \end{matrix} & \begin{matrix} (2Y_{32}+6Y_{33}u_1)u_2 \\ +2Y_{22}u_3 \end{matrix} & \begin{matrix} Y_{31}+2Y_{32}u_1+ \\ 3Y_{33}u_1^2+2Y_{22}u_2 \end{matrix} & Y_{21}+2Y_{22}u_1 & Y_{11} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3Y_{33}u_2u_3 & \begin{matrix} (2Y_{32}+6Y_{33}u_1)u_3 \\ +3Y_{33}u_2^2+Y_{22}u_4 \end{matrix} & \begin{matrix} (2Y_{32}+6Y_{33}u_1)u_2 \\ +2Y_{22}u_3 \end{matrix} & \begin{matrix} Y_{31}+2Y_{32}u_1+ \\ 3Y_{33}u_1^2-2Y_{22}u_2 \end{matrix} & Y_{21}+2Y_{22}u_1 & Y_{11} & 0 \\
0 & 0 & Y_{33}u_3^2 & \begin{matrix} (Y_{32}+3Y_{33}u_1)u_4 \\ +6Y_{33}u_2u_3 \end{matrix} & \begin{matrix} (2Y_{32}+6Y_{33}u_1)u_3 \\ +3Y_{33}u_2^2+2Y_{22}u_4 \end{matrix} & \begin{matrix} (2Y_{32}+6Y_{33}u_1)u_2 \\ +2Y_{22}u_3 \end{matrix} & \begin{matrix} Y_{31}+2Y_{32}u_1+ \\ 3Y_{33}u_1^2+2Y_{22}u_2 \end{matrix} & Y_{21}+2Y_{22}u_1 & Y_{11}
\end{pmatrix}
$$