具有细鞍点的二次系统*

蔡遂林　　张平光
（浙江大学）

发散量为零的初等奇点，如果它是焦点，称它为细焦点；如果它是鞍点，称它为细鞍点．在二次系统的研究中，在某些场合，细鞍点与细焦点起到类似的作用．例如，具有两个细焦点（细鞍点）或一细焦点一细鞍点的二次系统必无极限环[1,2]．若存在一个细焦点（细鞍点），则另外的细焦点至多是一阶的[3]．本文进一步研究了具有细鞍点的二次系统，发现了与具有细焦点的二次系统有许多不同的性质．例如，具有细焦点的二次系统，其极限环未必集中分布[4]，而本文证明：具有细鞍点的二次系统若存在极限环，则必集中分布（定理1）．我们还给出了点O外围存在极限环和不存在极限环的条件（定理2）．大家知道，具有细焦点和直线解的二次系统必无极限环[5]．而具有细鞍点和直线解的二次系统，要分几种情形讨论．本文证明：若直线解不通过细鞍点，则不存在极限环（定理3）；若直线解通过细鞍点，我们又分两种情形．在一种情况下，极限环只可能出现在某一个焦点外围，我们给出在全平面存在、唯一极限环的条件和全平面不存在极限环的条件；在另一种情况下，举例说明，在一个焦点外围不存在极限环时，在另一焦点外围可以出现极限环．

众所周知，有极限环的二次系统必有焦点．将此焦点作为坐标原点，则该二次系统总可写成：

$$\frac{dx}{dt}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2\quad,\qquad \frac{dy}{dt}=x(1+ax+by)\quad.\tag{1}$$

如果细鞍点N在y轴上，则$n\neq0$，且$N(0,\frac{1}{n})$，$\delta=-\frac{m}{n}$．如果N不在y轴上，则由〔6〕所提供的方法，作仿射变换，可使N变到y轴上，且（1）的形状不变．因此，可以认为N已在y轴上，且不妨令$n=1$．于是（1）写成

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-y-mx+lx^2+mxy+y^2\equiv P(x,y),\\ \frac{dy}{dt}&=x(1+ax+by)\equiv Q(x,y)\quad,\end{aligned}\tag{2}$$

N的坐标为（0,1），且O是焦点，从而$|m|<2$．

定理1　具有一个细鞍点的二次系统若存在极限环，则必集中分布于一个焦点外围．

证明　$\operatorname{div}(P,Q)=0$是一条直线L．N在L上，故L上至多还有一个切点T（因为任一直线上切点与奇点个数之和至多为2）．若存在极限环，则它必跨过L，且含T在其内部．于是知极限环必集中分布于一个焦点外围．█

定理2　具有一个细鞍点的二次系统（2），当$ma(b+2l)\geqslant0$时，点O外围不存在极限环；当$ma(b+2l)<0$，$0<|m|\ll1$时，（2）存在极限环，且集中分布于点O外围．在O的充分小邻域内，极限环是唯一的．

---

* 1984年5月8日收到．本文得到国家教委科技资金资助．

证明 先证不存在性．设$b\neq 0$，取Dulac函数$B=(1+by)^k$．

$(BP)'_x+(BQ)'_y=(1+by)^k[m(y-1)+(2l+b+kb)x]+kabx^2(1+by)^{k-1}$ ．

取$k=-1-2l/b$．若$m=0$，则 $(BP)'_x+(BQ)'_y=kabx^2(1+by)^{k-1}$推知（2）无极限环．若$a=0$，则 $(BP)'_x+(BQ)'_y=m(1+by)^k(y-1)$．但在$y=1$上（2）的$dy/dt=(1+b)x$，故知$y=1$，$x>0$和$y=1$，$x<0$分别是无切直线，而极限环内部又不能包含细鞍点(0,1)，故知若存在极限环必在$y=1$的一侧．由此推知（2）不存在极限环．若$2l+b=0$，则$(BP)'_x+(BQ)'_y=m(y-1)$．若存在环绕O的极限环，其最高点必在y轴上且在点N(0,1)的下方，故知必整个在$y=1$的下方．由此推知这种极限环也不存在．

若$b=0$．取Dulac函数$B=e^{-2ly}$．

$(BP)'_x+(BQ)'_y=e^{-2ly}[m(y-1)-2alx^2]$．与上类似地讨论可知：若$ma=0$，(2）不存在极限环；若$l=0$，则点O外围不存在极限环．总之，当$ma(b+2l)=0$时，O外无极限环．

为了证明当$ma(b+2l)>0$时点O外围不存在极限环，先计算点O的焦点量，有

$$v_1=-m;\qquad v_3=m(l+n)-a(b+2l)\quad .$$

在区域$G\triangleq\{(x,y)|1+ax+by>0,\ 1-y>0\}$内，

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \dfrac{\partial P}{\partial m} & \dfrac{\partial Q}{\partial m}\end{vmatrix}=x^2(1-y)(1+ax+by)\geqslant 0,$$

故（2）对m在G内构成旋转向量场．设$-a(b+2l)>0$．若$m=0$，由点O的焦点量知点O为不稳定焦点．故当$-a(b+2l)>0$，$m<0$时，不存在整个含于G内且环绕点O的极限环．但易知若存在环绕点O的极限环必整个含于G内，由此推知（2）不存在环绕点O的极限环．同理可证当$-a(b+2l)<0$，$m>0$时（2）也不存在环绕点O的极限环．

由焦点量公式容易知道当$ma(b+2l)<0$，$0<|m|\ll 1$时，O外存在极限环．在O的充分小的邻域内极限环的唯一性是由〔7〕的第6节Ⅶ推得．集中分布是由定理1推出．∎

具有细鞍点的二次系统如果还有直线解，将分几种情形讨论．首先有

定理3 设二次系统具有细鞍点和直线解，且直线解不经过细鞍点，则该系统不存在极限环．

证明 不妨从（2）出发．易知它不存在形如$x=x_0$的直线解．设（2）的直线解为$y-\alpha x-\beta=0$．于是，在该直线上，

$$\frac{d}{dt}(y-\alpha x-\beta)|_{(2)}=0.$$

由此推知

$$(\alpha^3+m\alpha^2+(l-b)\alpha-a)x^2+(2\alpha^2\beta+m\alpha\beta-m\alpha-\alpha^2-1-b\beta)x+\alpha\beta(\beta-1)\equiv 0 \qquad (3)$$

由定理1前面的说明，O是焦点，故直线解$y=\alpha x+\beta$不经过原点．又由定理的假设，直线解也不经过点N，故$\beta\neq 0$，$\beta\neq 1$．因此$\alpha=0$．从而$a=0$，$b\neq 0$，$\beta=-\dfrac{1}{b}$．于是方程（2）成为

$$\frac{dx}{dt}=-y+mx+lx^2+mxy+y^2\qquad \frac{dy}{dt}=x(1+by),\ b\neq 0.$$

它的确有不经过N的直线解$y=-\frac{1}{b}$. 由定理2中$a=0$的情形，知它不存在极限环. ∎

如果直线解经过细鞍点N，情形要复杂得多. 过鞍点有四个特征方向，相对的一对特征方向所在的直线，我们称之为特征直线. 若直线解经过鞍点，则此直线解必与一条特征直线重合.

引理1 具有经过细鞍点的直线解的二次系统，其焦点必集中分布于经过细鞍点的另一特征直线之一侧.

证明 除去明显不含焦点的情形外，可以从〔7〕的（12.8）式出发，将细鞍点移到原点（0,0），再经相似变换，具细鞍点的二次系统可化成

$$\frac{dx}{dt}=y+lx^2+mxy+ny^2,\qquad \frac{dy}{dt}=x(1+ax+by)\quad. \tag{4}$$

令$\xi=y-x$, $\eta=x+y$, 则（4）化为

$$\frac{d\xi}{dt}=-\xi+l'\xi^2+m'\xi\eta+n'\eta^2\quad,\qquad \frac{d\eta}{dt}=\eta+a'\eta^2+b'\xi\eta+c'\xi^2. \tag{5}$$

显然$\xi=0$和$\eta=0$是（4）的两条特征直线. 按引理条件，不妨设$\eta=0$是直线解，则系统（5）成为

$$\frac{d\xi}{dt}=-\xi+l'\xi^2+m'\xi\eta+n'\eta^2,\qquad \frac{d\eta}{dt}=\eta+a'\eta^2+b'\xi\eta. \tag{6}$$

如果$b'=0$，显然（6）无焦点. 不妨设$b'\neq 0$. 若$a'\neq 0$，令$b'\xi=\xi'$, $a'\eta=\eta'$作变换. 仍将变换后的ξ', η'分别记为ξ, η. ξ^2, $\xi\eta$, η^2的系数仍分别记为l, m, n. 于是所论系统可化为

$$\frac{d\xi}{dt}=-\xi+l\xi^2+m\xi\eta+n\eta^2\quad,\qquad \frac{d\eta}{dt}=\eta(1+\xi+\eta)\quad. \tag{7}$$

若$a'=0$，则在（6）中令$b'\xi=\xi'$作变换，于是所论系统可化成

$$\frac{d\xi}{dt}=-\xi+l\xi^2+m\xi\eta+n\eta^2\quad,\qquad \frac{d\eta}{dt}=\eta(1+\xi)\quad. \tag{8}$$

若为（8），焦点只可能在直线$\xi=-1$上，位于另一特征直线$\xi=0$的一侧，引理结论成立.

今考虑（7）. 在直线$\eta=0$上的奇点必非焦点. 在直线$1+\xi+\eta=0$上的奇点至多只有两个，设为$M(\xi_M,\eta_M)$和$R(\xi_R,\eta_R)$. 今证若$\xi_M\geqslant 0$，则M必非焦点，为此，计算M的特征方程，得

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,$$

其中（为简单起见，以下的书写中省去下标M）.

$$p=-(-1+2l\xi+(m+1)\eta)=-((2l-m-1)\xi-m-2),$$

$$q=(-1+2l\xi+m\eta)(1+2\eta+\xi)-\eta(m\xi+2n\eta)=(m-2l-1)\xi+m+1,$$

$$p^2-4q=[(m-2l+1)\xi+m]^2+8\xi\geqslant 0\quad.$$

故奇点M不是焦点. 同理可证若$\xi_R\geqslant 0$，则奇点R不是焦点. 即证得焦点只可能在另一特征直线$\xi=0$的一侧. ∎

引理2 二次系统（2）具有过细鞍点N的直线解的充分必要条件是（2）中的参数a, b, l, m满足

$$(-\sqrt{b+1})^3+m(b+1)-(l-b)\sqrt{b+1}-a=0\quad, \tag{9}$$

$$或\ (\sqrt{b+1})^3+m(b+1)+(l-b)\sqrt{b+1}-a=0\ . \tag{10}$$

此时相应的直线解为$y=-\sqrt{b+1}\,x+1$(记为L_1) 或$y=\sqrt{b+1}\,x+1$ (记为L_2).

证明　点N是细鞍点的充要条件是$b+1>0$. 设$y=ax+\beta$是经过N的直线解，则$\beta=1$. 再由（3）推知

$$a^2=b+1\quad, \tag{11}$$

$$a^3+ma^2+(l-b)a-a=0\quad. \tag{12}$$

由（11）和（12）知（9）或（10）成立. 反之,（9）或（10）成立，则存在a使（11）和（12）同时成立，于是推知$y=ax+1$是（2）的经过细鞍点N的直线解. ■

于是，具有过细鞍点直线解的二次系统可分如下（A）和（B）两种情形讨论

(A_1). $a>0$, $(-\sqrt{b+1})^3+m(b+1)-(l-b)\sqrt{b+1}-a=0$,

(A_2). $a<0$, $(\sqrt{b+1})^3+m(b+1)+(l-b)\sqrt{b+1}-a=0$;

(B_1). $a<0$, $(-\sqrt{b+1})^3+m(b+1)-(l-b)\sqrt{b+1}-a=0$,

(B_2). $a>0$, $(\sqrt{b+1})^3+m(b+1)+(l-b)\sqrt{b+1}-a=0$.

满足条件（A）的系统（2）记为$(2)_A$，满足条件（B）的系统（2）记为$(2)_B$.

引理 3　具有过细鞍点的直线解的二次系统$(2)_A$至多只有一个焦点.

证明　对于情形（A_2），令$x'=-x, \tau=-t$，即可化到（A_1）. 以下我们只就（A_1）的情形来证明. 此时$(2)_{A_1}$有直线解$y=-\sqrt{b+1}\,x+1$. 易知N的另一特征直线是$y=\sqrt{b+1}\,x+1$. 首先证明，直线L_1: $v\triangleq y+\sqrt{b+1}\,x-1=0$与直线$1+ax+by=0$的交点$M(x_M, y_M)$(若存在)必为$(2)_{A_1}$的奇点. 事实上，由

$$\frac{dv}{dt}=[x(1+ax+by)+\sqrt{b+1}(-y-mx+lx^2+mxy+y^2)]_{v=0}=0$$

将点M的坐标(x_M, y_M)代入，推知

$$x_M(1+ax_M+by_M)+\sqrt{b+1}(-y_M-mx_M+lx_M^2+mx_My_M+y_M^2)=0\ .$$

但$1+ax_M+by_M=0$，从而$-y_M-mx_M+lx_M^2+mx_My_M+y_M^2=0$，因此M是奇点. M既然在直线解上，故M不是焦点. 若$1+ax+by=0$存在另一奇点R，今证它也不是焦点. L_2将平面分成两个区域：含原点O的那个区域记为S_2，另一记为S_1. 若$R\in S_1$或$R\in L_2$，由引理1知R不是焦点. 以下研究$R\in S_2$的情形，分以下5种情况讨论：

i）$b=0$. 若$a=0$, 系统$(2)_{A_1}$显然最多只有一个焦点. 若$a\neq0$，则$x=0$上的奇点O和N与$1+ax=0$上的奇点M和R组成凸四边形，R与N相对顶. 由[8]定理1知R是鞍点.

ii）$b\neq0$，$a=0$. 则$1+by=0$是$(2)_{A_1}$的直线解，其上的奇点当然不是焦点.

iii）$b>0$，$b\sqrt{1+b}\neq a>0$. 则$1+ax+by=0$与L_1有交点M，且M必在第四或第二象限. 若M在第四象限（图1），L_1将区域S_2分成两部分：区域S_{21}和S_{22}. 若$R\in S_{22}$，则R和N为凸四边形的一对相对顶点. 由[8]知R是鞍点. 若$R\in S_{21}$，等倾线$1+ax+by=0$被奇点M、R分成三段，在M左边那段上，方向场指向右；MR段上，方向场指向左. 直线段OR也是无切线段，由于O是焦点，易知OR段上，方向场指向右上，于是知R不是焦点. 若M在第二象限（图2），则由[8]可证另一奇点R必是鞍点.

iv）$b>0$，$a=b\sqrt{1+b}$. 此时$1+ax+by=0$与L_1平行,由(11)(12)知，$1+ax+by=0$上只有唯一奇点R. 连RO及RN（如图3），由方向场知R非焦点.

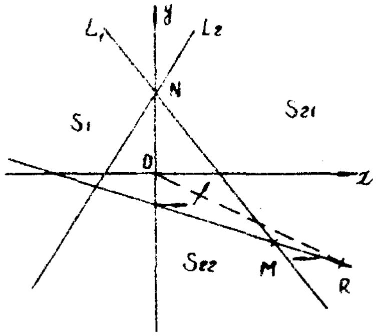

图 1

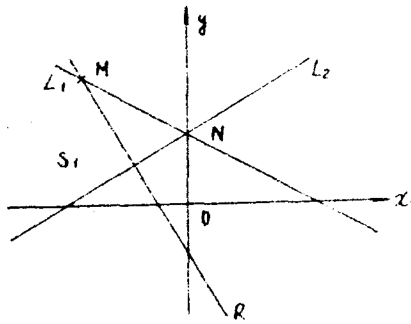

图 2

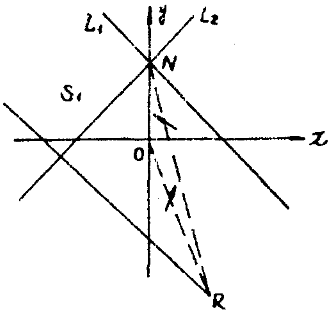

图 3

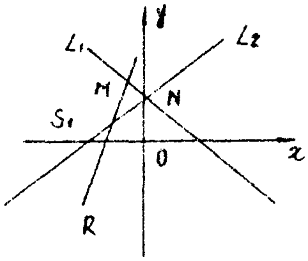

图 4

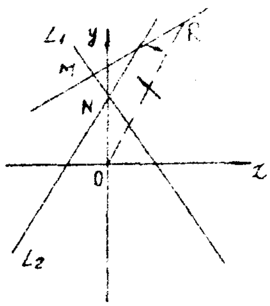

图 5

v） $-1<b<0$，$a>0$．此时 $1+ax+by=0$ 与 L_1 必有交点 B，且M必在第二象限．如图 4，R在第三象限，则由〔8〕知R是鞍点．若如图 5，R在第一象限，联结RO，由MR和OR上的方向场知，R不是焦点．各种情形讨论完毕，R不是焦点，故该系统只有唯一焦点O． ■

定理 4 具有经过细鞍点的直线解的二次系统（2）$_A$，当 $ma(b+2l)\geqslant 0$ 时，该系统不存在极限环；当 $ma(b+2l)<0$ 时，则存在 m^*，$0<m^*<\min\left(2, \dfrac{|b+2l|}{\sqrt{b+1}}\right)$，当 $0<|m|<m^*$ 时存在唯一极限环，此极限环包围点O，且随 $|m|$ 的增大而单调扩大，当 $|m|\geqslant m^*$ 时，系统（2）$_A$ 不再存在极限环．

证明 由定理 2、引理 3 以及"具有直线解的二次系统至多有一个极限环"[9-11]的定理，可推出本定理的前半部分结论．为证后半部分，不妨只要考虑情形（A_1）(对于（A_2），令 $x'=-x, \tau=-t$，即可化到（A_1））．此时，L_1 是（2）$_{A_1}$ 的直线解．将（9）代入（2）$_{A_1}$，于是得

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -y-mx+\left[-(b+1)+m(b+1)^{1/2}+b-a(b+1)^{-1/2}\right]x^2+mxy+y^2 \triangleq P(x,y),\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= x(1+ax+by) \triangleq Q(x,y).
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$
\begin{vmatrix} P & Q \\ \dfrac{\partial P}{\partial m} & \dfrac{\partial Q}{\partial m} \end{vmatrix} = x^2(1+ax+by)(1-\sqrt{b+1}\,x-y).
$$

注意到 $1-\sqrt{b+1}\,x-y=0$ 是直线解，环绕点O的极限环又不能跨过直线 $1+ax+by=0$．因此，在极限环存在的区域内，系统（13）对 m 构成正向旋转向量场．若 $a(b+2l)<0$，则当 $0<m<<1$ 时，极限环为正向不稳定．由旋转向量场理论知，此唯一极限环随 m 的增大而单调扩大．$\mathrm{div}(P,Q)=0$ 的直线为 $y=-\frac{b+2l}{m}x+1$．所以当 $m=-\frac{b+2l}{\sqrt{b+1}}$ 时，它是一条无切直线 $y=-\sqrt{b+1}\,x+1$．显然此时已无极限环．又当 $m=2$ 时，系统 $(2)_A$ 也已没有极限环．故存在 m^*，$0<m^*\leqslant\min[2,-(b+2l)/\sqrt{b+1}]$，当 $0<m<m^*$ 时，该系统存在环绕O的唯一极限环．当 $m=m^*$ 时，此极限环变成分界线环或与无穷远奇点相遇而消失．由不相交定理知，当 $m>m^*$ 时，极限环不再存在．同理可证 $a(b+2l)>0$ 的情形．

至于具有过细鞍点的直线解的二次系统 $(2)_B$，若把定理 4 中的结论部份限制在奇点O外围，则定理同样成立．但对全平面却得不到定理 4 的结果．下面举出例子，在某些参数 l，m，a，b 下，系统 $(2)_B$ 除焦点O外，还有另外一个焦点R．当环绕O点的极限环不存在时，却可以在R外围存在唯一极限环．例子如下：

对于情形 (B_2)，令 $x'=-x$，$\tau=-t$，即可化到情形 (B_1)．以下考虑情形 (B_1)．设 $b=0$，于是得直线解 $y=-x+1$．条件 (B_1) 为 $a<0$，$m=l+a+1$．在直线 $1+ax=0$ 上的奇点为 $M\left(-\frac{1}{a},\frac{a+1}{a}\right)$ 和 $R\left(-\frac{1}{a},\frac{a+l}{a}\right)$．令 $X=x+\frac{1}{a}$，$Y=y-\frac{a+l}{a}$，将奇点R作为坐标原点O′．再令 $x'=-X$，$y'=\sqrt{\frac{l-1}{a}}\,Y$，$\mathrm{d}t'=\sqrt{\frac{l-1}{a}}\,\mathrm{d}t$（取 $l<1$）．则 $(2)_{B_1}$ 化为

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} &= -y'+\sqrt{\frac{a}{l-1}}\,\frac{l(a+l-1)}{a}x'-\sqrt{\frac{a}{l-1}}\,lx'^2+\frac{a}{l-1}(l+a+1)x'y'-\left(\sqrt{\frac{a}{l-1}}\right)^3y'^2\\
\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} &= x'(1+ax')
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

由〔7〕的焦点量公式，R的焦点量为

$$
v_1'=\sqrt{\frac{a}{l-1}}\,\frac{l(a+l-1)}{a},\qquad v_3'=\sqrt{\frac{a}{l-1}}\,\frac{a[l(l-1)(l-3)-a(l^2+a+1)]}{(l-1)^2}
$$

取定 a，使 $-3<a<-1$，再取 $0<-l<<1$，使有 $-2<m<0$，$v_3'>0$，$0<-v_1'<<1$．于是R外围存在（唯一）极限环．又由引理 1 和〔8〕知，R在区域 S_{21}（如图 1），再注意到极限环不能跨过 L_1 和 L_2，故极限环必整个位于区域 S_{21} 内．

参 考 文 献

〔1〕Л. Черкас, Л. И. Жилевеч, Ду, 8, No. 12(1972), 2271—2273.

〔2〕———— , Ду, 10, No. 5(1974), 947—949.

〔3〕叶彦谦，王明淑，数学年刊，4A，No. 1(1983).

〔4〕陈兰荪，王明淑，数学学报，22，No. 6(1979)，751—758.

〔5〕Л. А. Черкас, Ду, 6, No. 5(1970), 779—783.

〔6〕史松龄，中国科学，No. 8(1980)，734—739.

〔7〕叶彦谦，极限环论（修订本），上海科学技术出版社，1984.

〔8〕А. Н. Берлиский, Изв. ВУЗОВ, Мате. 15, No. 2(1960), 3—18.

〔9〕Л. А. Черкас, Л. И. Жилевич, Ду, 6, No. 7(1970), 1170—1178.

〔10〕———— , Ду, 8, No. 7(1972), 1207—1213.

〔11〕Г. С. Рычков, Ду, 8, No. 12(1972), 2257—2259.