数学研究与评论
第七卷 第一期

超线性可变号核Hammerstein型积分方程的固有值

孙经先
（山东大学）

本文利用拓扑度理论〔2〕、〔3〕、〔4〕、〔5〕研究超线性可变号核Hammerstein型积分方程的固有值.

先证明关于拓扑度计算的一条定理．设E是Banach空间，X是E的一个收缩核，U是X中的有界开集，∂U是U在X中的边界，A：$\bar{\mathrm{U}}\to$X是全连续算子且在∂U上没有不动点．根据〔1〕、〔5〕可以定义A在U上关于X的不动点指数$i(A, \mathrm{U}, \mathrm{X})$，其定义和基本性质见〔4〕、〔5〕.

设X是E的收缩核，若存在$u_0\notin$X，使得只要$u\in$X，$\alpha\geq 1$，就有$\alpha u+(1-\alpha)u_0\in$X，则称X具有逆星形性质，$u_0$是X的逆星形中心．X的全体逆星形中心记为S(X).

引理1 设X是E中凸闭集，如果存在$u_0\in$X使得（i）任给$u\in$X，$\alpha\geq 0$，都有$\alpha u+(1-\alpha)u_0\in$X；（ii）存在$u\in$X及$\alpha'<0$，使$u^*=\alpha' u'+(1-\alpha')u_0\notin$X，则X具有逆星形性质且$u^*\in$S(X).

证明 任给$u\in$X及$\beta\geq 1$，我们有

$$\begin{aligned}\beta u+(1-\beta)u^* &= \beta u+(1-\beta)[\alpha' u'+(1-\alpha')u_0]\\ &= \frac{1}{2}[2\beta u+(1-2\beta)u_0]+\frac{1}{2}\{-2\alpha'(\beta-1)u'+[1+2\alpha'(\beta-1)]u_0\}\end{aligned}$$

由性质（i）知$2\beta u+(1-2\beta)u_0\in$X，$-2\alpha'(\beta-1)u'+[1+2\alpha'(\beta-1)]u_0\in$X，故由X的凸集性可知$\beta u+(1-\beta)u^*\in$X．证完.

显然，若X是E中的锥，则X具有逆星形性质.

定理1 设E是Banach空间，X是E的具有逆星形性质的收缩核，U是X中的有界开集，A：$\bar{\mathrm{U}}\to$X是全连续算子．若存在E的另一个收缩核Y$\subset$S(X)及∂U上的全连续算子B满足（i）$B(\partial\mathrm{U})\subset$Y；（ii）任给$x\in\partial$U及$0<t\leq 1$均有$Ax-Bx\neq t(x-Bx)$，则

$$i(A, \mathrm{U}, \mathrm{X})=0$$

证 设E是无限维空间．任取保核收缩r：E$\to$X并取R，使E中开球$\mathrm{T}_R=\{x|x\in\mathrm{E}, \|x\|<R\}\supset\bar{\mathrm{U}}$，令$A_1=A\cdot r$，$\Omega=\mathrm{T}_R\cap r^{-1}(\mathrm{U})$，由条件（ii）知$A$在$\partial$U上没有不动点，故根据定义（见〔4〕、〔5〕）有

$$i(A, \mathrm{U}, \mathrm{X})=\deg(I-A_1, \Omega, \theta) \tag{1}$$

显然A_1是映$\bar{\Omega}$到X的全连续算子．把B保持全连续性由∂U延拓到$\bar{\Omega}$上，延拓后的算子仍记为B．任取保核收缩r_1：E$\to$Y并令$B_1=r_1\cdot B$，则B_1映$\bar{\Omega}$到Y全连续．下证对任给$x\in\partial\Omega$，$0<t\leq 1$都有

*1983年8月25日收到.

$$A_1 x - B_1 x \neq t(x - B_1 x) \tag{2}$$

其中$\partial\Omega$是Ω在E中的边界．若$x \in \partial U$，则由定理条件（ii）及保核收缩的性质知对$0 < t \leq 1$有$A_1 x - B_1 x = Ax - Bx \neq t(x - Bx) = t(x - B_1 x)$，即（2）式成立．若存在$x_0 \in \partial\Omega \setminus \partial U$，$0 < t_0 \leq 1$使$A_1 x_0 - B_1 x_0 = t_0(x_0 - B_1 x_0)$，则有$t_0 x_0 + (1 - t_0) B_1 x_0 = A_1 x_0 \in X$，因为$B_1 x_0 \in Y \subset S(X)$，故$B_1 x_0$是X的逆星形中心，注意到$\frac{1}{t_0} \geq 1$，故

$$x_0 = \frac{1}{t_0}[t_0 x_0 + (1 - t_0) B_1 x_0] + (1 - \frac{1}{t_0}) B_1 x_0 \in X$$

于是x_0或属于U，或属于$X \setminus U$．若$x_0 \in U$，则$x_0 \in r^{-1}(x_0)$，又$x_0 \in U \subset T_R$，故$x_0 \in r^{-1}(x_0) \cap T_R \subset r^{-1}(U) \cap T_R = \Omega$，即$x_0 \notin \partial\Omega$，这与$x_0 \in \partial\Omega$矛盾．若$x_0 \in X \setminus \bar{U}$，则$\exists x_0$在X中的一个开邻域$V(x_0)$，使$V(x_0) \cap U = \phi$，而$x_0 \in r^{-1}(V(x_0))$．注意到$r^{-1}(V(x_0)) \cap r^{-1}(U) = \phi$，故$r^{-1}(V(x_0)) \cap \Omega = \phi$．又因为$r$：$E \to X$是连续映射，$V(x_0)$是X中的开集，所以$r^{-1}(V(x_0))$是E中的开集，故$x_0$有一个E中的开邻域$r^{-1}(V(x_0))$不与$\Omega$相交，即$x_0 \notin \partial\Omega$，这也与$x_0 \in \partial\Omega$矛盾．因此当$x \in \partial\Omega \setminus \partial U$时（2）式也成立．

令$B' = A_1 - B_1$，则$B_1 = A_1 - B'$，代入（2）式有$x - A_1 x \neq \frac{1-t}{t} B' x$，令$t' = \frac{1-t}{t}$，则由$0 < t \leq 1$知$0 \leq t' < +\infty$且当$t$取遍$(0, 1]$时$t'$取遍$[0, +\infty)$．故任给$x \in \partial\Omega$, $t' \geq 0$有

$$x - A_1 x \neq t' B' x \tag{3}$$

由于Banach空间的收缩核是闭集，故$\overline{A_1(\partial\Omega)} \subset X$，$\overline{B_1(\partial\Omega)} \subset Y$，注意到$\overline{A_1(\partial\Omega)}$和$\overline{B_1(\partial\Omega)}$都是紧集且$X \cap Y = \phi$，故$\inf\limits_{x \in \partial\Omega} \|B' x\| = \inf\limits_{x \in \partial\Omega} \|A_1 x - B_1 x\| > 0$，于是根据〔1〕引理2，$\deg(I - A_1, \Omega, \theta) = 0$，再由（1）式知$i(A, U, X) = 0$．

设E是有限维空间，任取无限维Banach空间E_1，做乘积空间$E^* = E \times E_1$，则显然可以把X看成E^*中的具有逆星形性质的收缩核，把Y看成E^*中的收缩核，于是问题转化为无穷维空间的情况．证完．

下面考察Hammerstein型非线性积分方程

$$\lambda\varphi(x) = \int_G K(x, y) f(y, \varphi(y)) \mathrm{d}y = A\varphi(x) \tag{4}$$

其中G是n维欧氏空间中的有界闭域．

定理2　设（i）$K(x, y)$在$G \times G$上连续（可以变号）且存在闭域$G_1 \subset G$，使对任给$y \in G$，有$\int_{G_1} K(x, y) \mathrm{d}x > 0$；（ii）$f(x, u)$在$G \times R$上连续（可以变号），$f(x, 0) \equiv 0$且当$|u|$充分小时$f'_u(x, u)$存在连续；（iii）$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{f(x, u)}{u} = +\infty$关于$x \in G_1$一致成立；（iv）$f(x, u)$下方有界．在以上条件下只要$\lambda > 0$，$\lambda \neq \lambda_n$（$n = 1、2、3、\cdots$），$\lambda$就是$A$的固有值．这里$\{\lambda_n\}$表线性积分算子（映C入C）

$$K\varphi(x) = \int_G K(x, y) f'_u(y, 0) \varphi(y) \mathrm{d}y \tag{5}$$

的全体固有值；详细地说，只要$\lambda > 0$，$\lambda \neq \lambda_n$，就必有G上不恒为零的连续函数φ_λ存在，使$A\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$．

证明　A显然是映C入C的全连续算子．由条件（iv）知存在常数$b > 0$，使对任给$x \in G$，$-\infty < u < +\infty$有$f(x, u) \geq -b$，取定$\lambda > 0$，令$\varphi_0(x) = \frac{b}{\lambda} \int_G K(x, y) \mathrm{d}y$, $\delta = \beta M^{-1}$,

其中$\beta=\inf\limits_{y\in G}\int_{G_1}K(x,y)\,\mathrm{d}x$，$M=\max\limits_{\substack{x\in G\\ y\in G}}|K(x,y)|$，令

$$X=\{\varphi(x)|\varphi(x)\in C,\ \int_{G_1}[\varphi(x)+\varphi_0(x)]\mathrm{d}x\geq\delta\,\|\varphi-\varphi_0\|\} \tag{6}$$

直接验证知X是凸闭集．任给$\varphi(x)\in C$，有

$$\int_{G_1}(\frac{1}{\lambda}A\varphi+\varphi_0)\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}\int_{G_1}\mathrm{d}x\int_G K(x,y)[f(y,\varphi(y))+b]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_G[f(y,\varphi(y))+b]\mathrm{d}y\int_{G_1}K(x,y)\mathrm{d}x\geq\frac{\beta}{\lambda}\int_G[f(y,\varphi(y))+b]\mathrm{d}y$$

$$\geq\frac{\beta M^{-1}}{\lambda}\int_G|K(x,y)|[f(y,\varphi(y))+b]\mathrm{d}y\geq\frac{\delta}{\lambda}\left|\int_G K(x,y)[f(y,\varphi(y))+b]\mathrm{d}y\right|$$

$$\geq\delta\left|\frac{1}{\lambda}A\varphi+\varphi_0\right|$$

故$\int_{G_1}(\frac{1}{\lambda}A\varphi+\varphi_0)\mathrm{d}x\geq\delta\,\|\frac{1}{\lambda}A\varphi+\varphi_0\|$，即$\frac{1}{\lambda}A$把C映入X．

直接验证表明X具有性质（i）对$-\varphi_0(x)$来说，若$\varphi(x)\in X$，则对一切$a\geq0$，$a\varphi+(1-a)(-\varphi_0)\in X$；（ii）$\theta\in X$．但若取$a'=-1$，则$a'\theta+(1-a')(-\varphi_0)=-2\varphi_0\notin X$．根据引理1，X是具有逆星形性质的收缩核且$-2\varphi_0\in S(X)$．

取$N=\dfrac{4\lambda\,\mathrm{mes}G_1}{\beta\delta}$，由条件（iii）知存在$u_1$，当$u\geq u_1$，$x\in G_1$时$f(x,u)\geq(N+1)u$，由条件（iv）可取$-\infty<r\leq0$，使

$$r\leq\inf_{\substack{x\in G\\ u\leq u_1}}[f(x,u)-(N+1)u]$$

于是对一切$x\in G_1$，$-\infty<u<+\infty$有

$$f(x,u)\geq(N+1)u+r \tag{7}$$

显然存在$u^*\geq u_1$，当$u\geq u^*$时

$$(N+1)u+r\,\mathrm{mes}G_1\geq Nu \tag{8}$$

取

$$R=\max\ \{\frac{2}{\delta}(\delta\,\|\varphi_0\|+\int_{G_1}\varphi_0(x)\mathrm{d}x)；\frac{2}{\delta}u^*；\ 4\,\|\varphi_0\|+\frac{Mb}{\lambda}\frac{(\mathrm{mes}G)^2}{\mathrm{mes}G_1}\} \tag{9}$$

则当$\varphi\in S_R=X\cap\{\varphi\,|\,\|\varphi\|=R\}$时，由$\|A\varphi\|\geq A\varphi$及（7）式有

$$\mathrm{mes}G_1\|\frac{1}{\lambda}A\varphi\|\geq\frac{1}{\lambda}\int_{G_1}\int_G K(x,y)f(y,\varphi(y))\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_G[f(y,\varphi(y))+b]\mathrm{d}y\int_{G_1}K(x,y)\mathrm{d}x-\frac{b}{\lambda}\int_G\mathrm{d}y\int_{G_1}K(x,y)\mathrm{d}x$$

$$\geq\frac{\beta}{\lambda}\int_G[f(y,\varphi(y))+b]\mathrm{d}y-\frac{Mb}{\lambda}(\mathrm{mes}G)^2$$

$$\geq\frac{\beta}{\lambda}\int_{G_1}[f(y,\varphi(y))+b]\mathrm{d}y-\frac{Mb}{\lambda}(\mathrm{mes}G)^2$$

$$\geq\frac{\beta}{\lambda}\int_{G_1}[(N+1)\varphi(y)+r]\mathrm{d}y-\frac{Mb}{\lambda}(\mathrm{mes}G)^2 \tag{10}$$

注意到$\varphi(x)\in X$，及（9）式，有

$$\begin{aligned}\int_{G_1}\varphi(y)\mathrm{d}y &= \int_{G_1}[\varphi(y)+\varphi_0(y)]\mathrm{d}y-\int_{G_1}\varphi_0(y)\mathrm{d}y \\ &\geq \delta\|\varphi+\varphi_0\|-\int_{G_1}\varphi_0(y)\mathrm{d}y \geq \delta\|\varphi\|-\delta\|\varphi_0\|-\int_{G_1}\varphi_0(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\delta}{2}R+\frac{\delta}{2}R-\delta\|\varphi_0\|-\int_{G_1}\varphi_0(x)\mathrm{d}x \geq \frac{\delta}{2}R\end{aligned} \tag{11}$$

于是，由（10)、(11)、(9)、(8 ）式有

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{\lambda}A\varphi-(-2\varphi_0)\right\| \geq \left\|\frac{1}{\lambda}A\varphi\right\|-2\|\varphi_0\| \\ &\geq \frac{1}{\mathrm{mesG}_1}\left\{\frac{\beta}{\lambda}\left[(N+1)\frac{\delta}{2}R+r\,\mathrm{mesG}_1\right]-\frac{M\,b}{\lambda}(\mathrm{mesG})^2\right\}-2\|\varphi_0\| \\ &\geq \frac{1}{\mathrm{mesG}_1}\left[\frac{\beta}{\lambda}\cdot\frac{\delta N}{\lambda}R-\frac{M\,b}{\lambda}(\mathrm{mesG})^2\right]-2\|\varphi_0\| \\ &= 2R-\frac{M\,b}{\lambda}\cdot\frac{(\mathrm{mesG})^2}{\mathrm{mesG}_1}\;2\|\varphi_0\| \geq R+2\|\varphi_0\| \\ &= \|\varphi\|+2\|\varphi_0\| \geq \|\varphi-(-2\varphi_0)\|\end{aligned} \tag{12}$$

不失一般性，设$\frac{1}{\lambda}A$在S_R上没有不动点，令$B\varphi\equiv-2\varphi_0$，令$U=X\cap\{\varphi\,|\,\|\varphi\|<R\}$，由定理 1 知

$$i\left(\frac{A}{\lambda},\ U,\ X\right)=0 \tag{13}$$

由条件（ii）知A在θ点处有Fréchet 导算子A'_θ且$A'_\theta=K$，其中算子K由（5）式定义．由假定λ不是$A'_\theta=K$的固有值，从而根据Leray-Schaucler定理（〔3〕，第二章定理4.7）知θ为$I-\frac{1}{\lambda}A$的弧立零点且

$$\left|i\left(I-\frac{1}{\lambda}A,\ \theta;C\right)\right|=1$$

由于$\frac{1}{\lambda}A$把C映入X，根据〔4〕定理11.1性质（iv）可知

$$\left|i\left(I-\frac{1}{\lambda}A,\ \theta;\ X\right)\right|=1 \tag{14}$$

由（13)、(14）两式可知存在$\varphi_\lambda\in X$，$\varphi_\lambda\neq\theta$，使$\varphi_\lambda=\frac{1}{\lambda}A\varphi_\lambda$，即$\lambda$是$A$的固有值．证完．

推论 1　在定理 2 的条件下若进一步假定存在闭域$G_2\subset G$,使任给$y\in G$，有$\int_{G_1}K(x,y)\mathrm{d}x<0$． 则只要$\lambda\neq0$，$\lambda\neq\lambda_n$，$\lambda$就是$A$的固有值．

证明　由定理 2 知若$\lambda>0$，$\lambda\neq\lambda_n$，λ就是A的固有值．若$\lambda<0$，我们考察算子$A_1\varphi=\int_G K_1(x,y)f(y,\varphi(y))\mathrm{d}y$，其中$K_1(x,y)=-K(x,y)$，显然算子$A_1$满足定理 2 的条件且$A_1$在$\theta$点处的Fréchet 导算子就是$-A'_\theta$，于是只要$-\lambda>0$，$-\lambda\neq-\lambda_n$，$-\lambda$就是$A_1$的固有值，即存在$\varphi^*\in C$，$\varphi^*\neq\theta$，使$\frac{1}{-\lambda}A_1\varphi^*=\varphi^*$．由于$\frac{1}{-\lambda}A_1\varphi^*=\frac{1}{\lambda}A\varphi^*$，故$\frac{1}{\lambda}A\varphi^*=\varphi^*$，即$\lambda$是$A$的固有值．证完．

推论 2　在定理 2 的条件下，若（iv）加强为$\lim\limits_{n\to-\infty}\frac{f(x,u)}{|u|}=+\infty$关于$x\in G_1$一致成立，则只要$\lambda\neq0$，$\lambda\neq\lambda_n$，$\lambda$就是$A$的固有值．

证明仿推论 1．当$\lambda<0$时考察　由$f_1(x,u)=f(x,-u)$确定的算子$A_1\varphi=\int_G K(x,y)f_1(y,\varphi(y))\mathrm{d}y$即可．

作者衷心感谢郭大钧教授的指导.

参考文献

〔1〕Guo Dajun (郭大钧), Eigenvalues and eigenvectors of nonlinear operators, Chin. Ann. of Math., 2 (Eng. Issue), 1981, 65—80.
〔2〕陈文嫄, 非线性泛函分析, 甘肃人民出版社, 1982.
〔3〕Красносельский, М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Москва, 1956.
〔4〕Amann, H., Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach space, SIAM. Review, 18(1976), 620—709.
〔5〕郭大钧, 非线性算子方程的正解及其对非线性积分方程的应用, 山东大学数学系, 1981, 5.
〔6〕孙经先, Hammerstein非线性积分方程的正解（英文）, 数学研究与评论, 1983年第一期, 45—46.

Eigenvalues of Superlinear Hammerstein Integral Equation witn Variable Sign Kernel

Sun Jingxian

Abstract

In this paper we use the theory of topological degree to investigate the eigenvalues of Hammerstein superlinear integral equations with variable sign kernel:

$$A\varphi(x)=\int_G K(x,y)f(y,\varphi(y))\,\mathrm{d}y=\lambda\varphi(x).$$

We have proved that except at most a sequence of numbers $\{\lambda_n\}$, which converges to zoro, all other numbers λ are eigenvalues of A.

（接86页）

参考文献

〔1〕杨安洲. 有限集合上的函数和关系的完全性理论中的两个未解决的问题, 本刊第六卷（1986）, 第4期.
〔2〕杨安洲, 刘世祥, 一元的全函数与偏函数的基的最小基数, 数学研究与评论, 6卷1期（1986. 3.）, p. 84.
〔3〕杨安洲, 李浩, A类（0,1）矩阵的基的一些定理, 数学研究与评论, 6卷1期（1986. 3.）, p. 50.
〔4〕杨安洲, 李浩, B类零壹矩阵的基的一些定理, 数学研究与评论, 6卷1期（1986. 3.）, p. 14.
〔5〕Kuratowski, K. and Mostowski, A., Set Theory, 1976.