1987 年 2 月

数学研究与评论
第七卷　第一期

二元关系的基的一些定理*

杨　安　洲

（北京工业大学）

令X是集合，$X^2=X\times X$（笛卡儿乘积），若$R\subseteq X^2$则称R是X上的一个二元关系，令$\mathbf{R}=\{R:R\subseteq X^2\}$，对于$R,S\in\mathbf{R}$定义$RS=\{(x,z):(\exists y\in X)((x,y)\in R\&(y,z)\in S)\}$，对于$F\subseteq\mathbf{R}$说F是$\mathbf{R}$的一个基（或生成子的集）当且仅当满足$(\forall R\in\mathbf{R})(\exists R_1,R_2,\cdots,R_k\in F)(R=R_1R_2\cdots R_k)$，$C=\{F:F$是$\mathbf{R}$的基$\}$，当S是集合时用$|S|$表示S的基数，用$\mathbf{P}(S)(=\{A:A\subseteq S\})$表示S的幂集，$2^{|S|}$表示s的幂集的基数.

定理 1　当X是无穷时，对于任$F\in C$（i.e. F是$\mathbf{R}$的基）均有$|F|=2^{|X|}$.

定理 2　当X是有限时且$|X|\geq 3$时，则有$\min\{|F|:F\in C\}=5$.（注：在$0\leq|X|\leq 2$时、基的最小基数是易知的！）

用布尔的（0,1）矩阵的语言（二元关系的矩阵表示）来说，可表述如下：令$n\geq 3$，$\mathbf{M}=\{A:A$是$n\times n$的（0,1）矩阵$\}$，矩阵之间相乘按通常的方式进行，$0\cdot 0=0\cdot 1=0+0=0$，$1\cdot 1=0+1=1+0=1+1=1$，对于$D\subseteq\mathbf{M}$说D是M的一个基当且仅当$(\forall P\in\mathbf{M})(\exists P_1,\cdots,P_k\in D)(P=P_1P_2\cdots P_k)$，并且令$C=\{D:D$是M的基$\}$，则有$\min\{|D|:D\in C\}=5$；若命

$$P_1=\begin{bmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&0&\ddots&\\&&&\ddots&1\\1&&&&0\end{bmatrix}_{n\times n},\quad P_2=\begin{bmatrix}0&1&&&\\1&0&&&\\&&1&&\\&&&1&\\&&&&\ddots\\&&&&&1\end{bmatrix}_{n\times n},\quad P_3=\begin{bmatrix}1&0&&&\\1&0&&&\\&&1&&\\&&&1&\\&&&&\ddots\\&&&&&1\end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$P_4=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1&\\&&&&0\end{bmatrix}_{n\times n},\quad P_5=\begin{bmatrix}1&1&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\&&1&&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}$$

，则$\{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\}$是M的一个极小的基（注：这里的P_1,P_2,P_3就是〔3〕中的B_1,B_2,B_3，这里的P_1,P_2,P_3,P_4就是〔4〕中的C_1,C_2,C_3,C_4，（注意〔2〕、〔3〕、〔4〕中有几处刊误！）.

为了证明以上的定理，我们予先证明了一系列的引理，根据这些引理一方面得到"基"（实际上是极小的基），另一方面要证明任一基的基数必须满足的下界是什么.

还有一些问题没有解决，例如用（0,1）矩阵的说法，问当$n\geq 3$时命$\mathbf{K}=\{D:D$是M的基$\&|D|=5\}$，$|K|=?$. （转85页）

* 1986年6月20日收到.

作者衷心感谢郭大钧教授的指导.

参 考 文 献

〔1〕Guo Dajun (郭大钧), Eigenvalues and eigenvectors of nonlinear operators, Chin. Ann. of Math., 2 (Eng. Issue), 1981, 65—80.
〔2〕陈文塬，非线性泛函分析，甘肃人民出版社，1982.
〔3〕Красносельский, М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Москва, 1956.
〔4〕Amann, H., Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach space, SIAM. Review, 18(1976), 620—709.
〔5〕郭大钧，非线性算子方程的正解及其对非线性积分方程的应用，山东大学数学系，1981，5.
〔6〕孙经先，Hammerstein非线性积分方程的正解（英文），数学研究与评论，1983年第一期，45—46.

Eigenvalues of Superlinear Hammerstein Integral Equation witn Variable Sign Kernel

Sun Jingxian

Abstract

In this paper we use the theory of topological degree to investigate the eigenvalues of Hammerstein superlinear integral equations with variable sign kernel:

$$A\varphi(x)=\int_G K(x,y)f(y,\varphi(y))\mathrm{d}y=\lambda\varphi(x).$$

We have proved that except at most a sequence of numbers $\{\lambda_n\}$, which converges to zoro, all other numbers λ are eigenvalues of A.

（接86页）

参 考 文 献

〔1〕杨安洲，有限集合上的函数和关系的完全性理论中的两个未解决的问题，本刊第六卷（1986），第4期.
〔2〕杨安洲，刘世祥，一元的全函数与偏函数的基的最小基数，数学研究与评论，6卷1期（1986．3．），p. 84.
〔3〕杨安洲，李浩，A类（0，1）矩阵的基的一些定理，数学研究与评论，6卷1期（1986．3．），p. 50.
〔4〕杨安洲，李浩，B类零壹矩阵的基的一些定理，数学研究与评论，6卷1期（1986．3．），p. 14.
〔5〕Kuratowski, K. and Mostowski, A., Set Theory, 1976.