1987年2月

数学研究与评论
第七卷　第一期

关于C^k类缺插值样条*

王　金　先

（杭州师范学院）

文献〔1～2〕讨论了亏度为2的四次缺插值样条，文献〔7～10〕讨论了亏度为3的五次缺插值样条，文献〔3—6〕对很一般的C^1、C^2类缺插值样条作了系统的、深刻的研究。

本文通过运用H-B插值样条的良好结果，讨论一般的C^k〔0，1〕中的s次缺插值样条，统一并推广了已有的许多成果〔1～10〕．

设Δ_n: $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$, $h_v=x_{v+1}-x_v$, $\|\Delta_n\|=\max\limits_v h_v$, $v=0,1,\cdots,n-1$. $0=a_0<a_1<\cdots<a_{m+1}=1$, $t_{v,i}=x_v+a_ih_v$, $v=0,1,\cdots,n-1$, $i=0,1,\cdots,m+1$, $0\leq p_{i,1}<p_{i,2}<\cdots<p_{i,r_i}\leq s$, $i=1,\cdots,m$, $s=\sum\limits_{i=1}^{m}r_i+2k-1$, $k\geq1$, j_1, $j_2\in\{0,1,\cdots,k\}$ $j_1\neq j_2$, $E=\{i\,|\,i=0,1,\cdots,k,i\neq j_2\}$, $F=\{i\,|\,i=0,1,\cdots,k,i\neq j_1,\ j_2\}$, $l_1=\max E$, $l_2=\max F$, $l=\max\limits_i\{p_{i,r_i},l_1\}$, $l'=\max\limits_i\{p_{i,r_i},l_2\}$, $f(x)\in C^{l'}[0,\ 1]$.

$S_{\Delta_n}(x)$为满足下列条件的s次缺插值样条：

i) $S_{\Delta_n}(x)\in C^k[0,\ 1]$

ii) 在$[x_v,\ x_{v+1}]$上是不高于s次的多项式，$v=0,1,\cdots,n-1$.

iii) $S_{\Delta_n}^{(j)}(t_{v,i})=f^{(j)}(t_{v,i})$, $v=0,1,\cdots,n-1$, $i=1,\cdots,m$. $j=p_{i,1},p_{i,2},\cdots,p_{i,r_i}$.

iv) $S_{\Delta_n}^{(j)}(x_v)=f^{(j)}(x_v)$, $v=0,1,\cdots,n$, $j\in F$,

v) $f(x)\in C_p^l[0,\ 1]$, $S_{\Delta_n}(x)\in C^k[0,\ 1]$ 或

v)′ $S_{\Delta_n}^{(j_1)}(0)=f^{(j_1)}(0)$, $S_{\Delta_n}^{(j_1)}(1)=f^{(j)}(1)$

设$P(x)\in P_s[0,\ 1]$，则
$$P(x)=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{s}P_{(i)}^{(j)}V_{i,j}(x)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{s}P^{(j)}(a_i)U_{i,j}(x)\tag{1}$$

其中$V_{i,j}(x)$、$U_{i,j}(x)$为满足下列条件的不高于s次的多项式：

$V_{i,j}^{(l)}(k)=\delta_{i,k}\cdot\delta_{j,l}$, $i,k=0,1,j,l\in E$, $V_{i,j}^{(l)}(a_k)=0$, $k=1,\cdots,m,l=p_{k,2},p_{k,2},\cdots,p_{k,r_k}$. $V_{i,j}(x)\equiv0$, $i=0,1$, $j\overline{\in}E$, $U_{i,j}^{(l)}(a_k)=\delta_{i,k}\cdot\delta_{j,l}$, i, $k=1,\cdots,m$, $j=p_{i,1},p_{i,2},\cdots,p_{i,r_i}$. $l=p_{k,1}$, $p_{k,2},\cdots,p_{k,r_k}$, $U_{i,j}^{(l)}(k)=0$, $k=0,1$, $l\in E$, $U_{i,j}(x)\equiv0$, $i=1,\cdots,m$, $j\neq p_{i,1},p_{i,2},\cdots,p_{i,r_i}$. 在本文中，我们假定上述$V_{i,j}(x)$, $U_{i,j}(x)$是唯一决定的．

则当$x\in(x_v,\ x_{v+1})$时，有

$$S_{\Delta_n}(x)=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j\in F}h_v^jf^{(j)}(x_{v+i})V_{i,j}\left(\frac{x-x_v}{h_v}\right)+h_v^{j_1}S_{\Delta_n}^{(j_1)}(x_v)\ V_{0,j_1}\left(\frac{x-x_v}{h_v}\right)$$

* 1983年10月28日收到．

$$+h_v^{j_1}S_{\Delta_n}^{(j_1)}(x_{v+1})V_{1,j_1}(\frac{x-x_v}{h_v})+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{s}h_v^j f(t_{v,i}^{(j)})U_{i,j}(\frac{x-x_v}{h_v}) \quad (2)$$

记$U_{0,j}(x)\equiv V_{0,j}(x)$，$U_{m+1,j}(x)\equiv V_{1,j}(x)$ $j=0,1,\cdots,s$，则有H-B插值样条．

$$S_{\Delta_n}^{*}(x)=\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{s}h_v^j f^{(j)}(t_{v,i})U_{i,j}(\frac{x-x_v}{h_v}),\quad x\in(x_v,\ x_{v+1})$$．若$f(x)\in C^l[0,1]$的话（3）

引理1 设$f(x)\in C^r[0,1]$．$l\leq r\leq s$，则当$x_v<x<x_{v+1}$时，

（1）$\|S_{\Delta_n}^{*(p)}(x)-f^{(p)}(x)\|=O(h_v^{r-p}\omega(f^{(r)};\ h_v))$ $p\leq r$

（2）$\|S_{\Delta_n}^{*(p)}(x)\|=O(h_v^{r-p}\omega(f^{(r)};h_v))$ $p>r$

证明 我们需要下列恒等式和Taylor公式．把$1,x,x^2,\cdots,x^s$代入（1）式，

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{q}\frac{a_i^{q-j}}{(q-j)!}U_{i,j}(x)=\frac{x^q}{q!} \qquad q\leq s\\&\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{q}\frac{a_i^{q-j}}{(q-j)!}U_{i,j}^{(p)}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{q-j}}{(q-p)!} & p\leq q\leq s\\0 & p>q,\ q\leq s\end{cases}\end{aligned}\right\}\quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}&f^{(j)}(t_{v,i})=\sum_{q=j}^{r}f^{(q)}(x_v)\frac{a_i^{q-j}}{(q-j)!}h_v^{q-j}+O(h_v^{r-j}\omega(f^{(r)};h_v)) \qquad j\leq r\\&f^{(p)}(x)=\sum_{q=p}^{r}f^{(q)}(x_v)\frac{(x-x_v)^{q-p}}{(q-p)!}+O(h_v^{r-p}\omega(f^{(r)};\ h_v)) \qquad p\leq r\ x\in(x_v,x_{v+1})\end{aligned}\right\}\quad (5)$$

其中O关于$x\in(x_v,\ x_{v+1})$一致．由（3）式，利用（5）式，并把（4）式代入．注意到$j>r$时，$U_{i,j}(x)\equiv0$，

$$h_v^pS_{\Delta_n}^{*(p)}(x)=\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{r}\sum_{q=j}^{r}h_v^q f^{(q)}(x_v)\frac{a_i^{q-j}}{(q-j)!}U_{i,j}^{(p)}(\frac{x-x_v}{h_v})+O(h_v^r\omega(f^{(r)},\ h_v))$$

$$=\sum_{q=0}^{r}h_v^q f^{(q)}(x_v)\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{q}\frac{a_i^{q-j}}{(q-j)!}U_{i,j}^{(p)}(\frac{x-x_v}{h_v})+O(h_v^r\omega(f^{(r)},\ h_v))$$

$$=\begin{cases}h_v^p\displaystyle\sum_{q=p}^{r}f^{(q)}(x_v)\frac{(x-x_v)^{q-p}}{(q-p)!}+O(h_v^r\omega(f^{(r)},\ h_v)), & p\leq r\\O(h_v^r\omega(f^{(r)},\ h_v)). & p>r\end{cases}$$

再利用（5）式，即得引理的证明．

引理2 设$f(x)\in C^r[0,1]$，$0\leq p\leq s\leq r$，则当$x\in(x_v,\ x_{v+1})$时，

$$f^{(p)}(x)-S_{\Delta_n}^{*(p)}(x)=\sum_{q=s+1}^{r}h_v^{q-p}\Big[f^{(q)}(x)\varphi_{q,p}(\frac{x-x_v}{h_v})-\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{s}f^{(q)}(t_{v,i})\varphi_{q,j}(a_i)$$

$$U_{i,j}^{(p)}(\frac{x-x_v}{h_v})\Big]+O(h_v^{r-p}\omega(f^{(r)},\ h_v)),$$

其中$\varphi_{q,p}(x)=\left\{\prod_{i=0}^{m+1}(y-a_i)^{r_i}[\underbrace{a_0,\cdots,a_0}_{r_0},\underbrace{a_1\cdots,a_1}_{r_1},\cdots,\underbrace{a_{m+1},\cdots,a_{m+1}}_{r_{m+1}},y]\frac{(\cdot-x)^q}{q!}\right\}^{(p)}_{y=x}$

这里$r_0=r_{m+1}=k$，证明见文献〔6〕．

定理1 若下列条件之一满足，则$S_{\Delta_n}(x)$存在唯一．

（1） $x_v=\frac{v}{n}$，$h=\frac{1}{n}$，$v=0,1,\cdots,n$，$\left|V_{1,j_1}^{(j_2)}(1)-V_{0,j_1}^{(j_2)}(0)\right|>\left|V_{0,j_1}^{(j_2)}(1)\right|+\left|V_{1,j_1}^{(j_2)}(0)\right|$

（2） $a_i+a_{m+1-i}=1$，$r_i=r_{m+1-i}$，$p_{i,j}=p_{m+1-i,j}$，$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,r_i$，j_1+j_2为奇数。

$$\left|V_{1,j_1}^{(j_2)}(1)\right|>\left|V_{i,j_1}^{(j_2)}(0)\right|$$

证明 （1）由（2）式及$S_n(x)\in C^k[0,1]$，我们得到连续性方程

$$h^{j_1}V_{0,j_1}^{(j_2)}(1)\ S_n^{(j_1)}(x_{v-1})+h^{j_1}[V_{1,j_1}^{(j_2)}(1)-V_{0,j_1}^{(j_2)}(0)]\ S_n^{(j_1)}(x_v)-h^{j_1}V_{1,j_1}^{(j_2)}(0)\ S_n^{(j_1)}(x_{v-1})$$

$$=\Big[\sum_{i=0}^{1}\sum_{j\in F}h^jf^{(j)}(x_{v+i})\ V_{i,j}^{(j_2)}(0)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{s}h^jf^{(j)}(t_{v,i})\ U_{i,j}^{(j_2)}(0)\Big]$$

$$-\Big[\sum_{i=0}^{1}\sum_{j\in F}h^jf^{(j)}(x_{v-1+i})\ V_{i,j}^{(j_2)}(1)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{s}h^jf^{(j)}(t_{v-1,i})\ U_{i,j}^{(j_2)}(1)\Big]\quad v=1,\cdots,n-1\ (6)$$

结合边界条件，这是一组对角占优方程，故有唯一解。

（2）由（2）式及$S_{\Delta_n}(x)\in C^k[0,1]$，得到连续性方程

$$h_{v-1}^{j_2}\Big[\sum_{i=0}^{1}\sum_{j\in F}h_v^jf^{(j)}(x_{v+i})\ V_{i,j}^{(j_2)}(0)+h_v^{j_1}S_{\Delta_n}^{(j_1)}(x_v)\ V_{0,j_1}^{(j_2)}(0)+h_v^{j_1}S_{\Delta_n}^{(j_1)}(x_{v+1})\ V_{1,j_1}^{(j_2)}(0)+$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{s}h_v^jf^{(j)}(t_{v,i})\ U_{i,j}^{(j_2)}(0)\Big]=$$

$$h_v^{j_2}\Big[\sum_{i=0}^{1}\sum_{j\in F}h_{v-1}^jf^{(j)}(x_{v-1+i})\ V_{i,j}^{(j_2)}(1)+h_{v-1}^{(j_1)}S_{\Delta_n}^{(j_1)}(x_{v-1})V_{0,j_1}^{(j_2)}(1)+h_{v-1}^{j_1}S_{\Delta_n}^{(j_1)}(x_v)\ V_{1,j_1}^{(j_2)}(1)+$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{s}h_{v-1}^jf^{(j)}(t_{v-1,i})\ U_{i,j}^{(j_2)}(1)\Big]\ .$$

易证，$V_{0,j_1}(x)=(-1)^{j_1}V_{1,j_1}(1-x)$，由$j_1+j_2$为奇数得$V_{0,j_1}^{(j_2)}(0)=-V_{1,j_1}^{(j_2)}(1)$，

$V_{1,j_1}^{(j_2)}(0)=-V_{0,j_1}^{(j_2)}(1)$，从而连续性方程化为

$$\frac{h_v^{j_0}}{h_{v-1}^{j_0}+h_v^{j_0}}V_{0,j_1}^{(j_2)}(1)\ S_{\Delta_n}^{(j_1)}(x_{v-1})+V_{1,j_1}^{(j_2)}(1)S_{\Delta_n}^{(j_1)}(x_v)+\frac{h_{v-1}^{j_0}}{h_{v-1}^{j_0}+h_v^{j_0}}S_{\Delta_n}^{(j_1)}(x_{v+1})\cdot V_{0,j_1}^{(j_2)}(1)=$$

$$\frac{h_{v-1}^{j_0}}{(h_{v-1}^{j_0}+h_v^{j_0})\ h_v^{j_1}}\Big[\sum_{i=0}^{1}\sum_{j\in F}h_v^jf^{(j)}(x_{v+i})\ V_{i,j}^{(j_2)}(0)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{s}h_v^jf^{(j)}(t_{v,i})\ U_{i,j}^{(j_2)}(0)\Big]-$$

$$\frac{h_v^{j_0}}{(h_{v-1}^{j_0}+h_v^{j_0})\ h_{v-1}^{j_1}}\Big[\sum_{i=0}^{1}\sum_{j\in F}h_{v-1}^jf^{(j)}(x_{v-1+i})\ V_{i,j}^{(j_2)}(1)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{s}h_{v-1}^jf^{(j)}(t_{v-1,i})\ U_{i,j}^{(j_2)}(1)\Big]$$

$v=1,\cdots,n-1$ （7）

其中$j_0=j_2-j_1$。结合边界条件，这是一组对角占优方程，故有唯一解。

为给出收敛速度的估计，我们先建立

引理3 在定理1的任一条件下，$l\le r\le s$，$f(x)\in C^r[0,1]$，则

$$\max_{0\le v\le n}\left|S_{\Delta_n}^{(j_1)}(x_v)-f^{(j_1)}(x_v)\right|=O(\|\Delta_n\|^{r-j_1}\omega(f^{(r)};\|\Delta_n\|))$$

证明 我们仅在定理1（2）条件下证明，定理1（1）条件下证明完全类似。

由（7）式$\frac{h_v^{j_0}}{h_{v-1}^{j_0}+h_v^{j_0}}V_{0,j_1}^{(j_2)}(1)\Big[S_{\Delta_n}^{(j_1)}(x_{v-1})-f^{(j_1)}(x_{v-1})\Big]+V_{1,j_1}^{(j_2)}(1)\Big[S_{\Delta_n}^{(j_1)}(x_v)-f^{(j_1)}(x_v)\Big]+$

$$\frac{h_{v-1}^{j_0}}{h_{v-1}^{j_0}+h_v^{j_0}}\left[S_{\Delta_n}^{(j_1)}(x_{v+1})-f^{(j_1)}(x_{v+1})\right]\cdot V_{0,j_1}^{(j_2)}(1)=$$

$$-\frac{h_{v-1}^{j_0}}{(h_{v-1}^{j_0}+h_v^{j_0})\ h_v^{j_1}}\left[\sum_{i=0}^{1}\sum_{j\in E}h_v^j f^{(j)}(x_{v+i})\ V_{i,j}^{(j_2)}(0)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{s}h_v^j f^j(t_{v,i})\ U_{i,j}^{(j_2)}(0)\right]-$$

$$\frac{h_v^{j_0}}{(h_{v-1}^{j_0}+h_v^{j_0})\ h_{v-1}^{j_1}}\left[\sum_{i=0}^{1}\sum_{j\in E}h_{v-1}^j f^{(j)}(x_{v-1+i})\ V_{i,j}^{(j_2)}(1)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{s}h_{v-1}^j f^{(j)}(t_{v-1,i})\ U_{i,j}^{(j_2)}(1)\right]=$$

$$-\frac{h_{v-1}^{j_0}\ h_v^{j_0}}{h_{v-1}^{j_0}+h_v^{j_0}}\left[S_{\Delta_n}^{*(j_2)}(x_v+)-S_{\Delta_n}^{*(j_2)}(x_v-)\right]\qquad v=1,\cdots,n-1\qquad (8)$$

若$r<j_2$，则$i_2=k$，$r=k-1$，由引理1，$\|S_{\Delta_n}^{*(k)}(x)\|=O(h_v^{-1}\omega(f^{(k-1)},\ h_v))$，$x_v<x<x_{v+1}$ $v=0,1,\cdots,n-1$，因此，（8）式右端成为

$$\frac{h_{v-1}^{j_0}\ h_v^{j_0-1}}{h_{v-1}^{j_0}+h_v^{j_0}}O(\omega(f^{(k-1)},\ h_v))+\frac{h_{v-1}^{j_0-1}h_v^{j_0}}{h_{v-1}^{j_0}+h_v^{j_0}}O(\omega(f^{(k-1)}h_{v-1}))=O(\|\Delta_n\|^{r-j_1}\omega(f^{(r)},\ \|\Delta_n\|))$$

若$r\geq j_2$，由引理1，$\|S_{\Delta_n}^{*(j_2)}(x)-f^{(j_2)}(x)\|=O(h_v^{r-j}\omega(f^{(r)},\ h_v))$，$x_v<x<x_{v+1}$，$v=0,1,\cdots,n-1$。因此 $|S_{\Delta_n}^{*(j_2)}(x_v+)-f^{(j_2)}(x_v)|=O(h_v^{r-j_2}\omega(f^{(r)},\ h_v))$，$|S_{\Delta_n}^{*(j_2)}(x_v-)-f^{(j_2)}(x_v)|=O(h_{v-1}^{r-j_2}\omega(f^{(r)},\ h_{v-1}))$。从而（8）式右端成为$O(\|\Delta_n\|^{r-j}\omega(f^{(r)},\ \|\Delta_n\|))$。由于方程组（8）是对角占优的，故$\max\limits_{0\leq v\leq n}|S_{\Delta_n}^{(j_1)}(x_v)-f^{(j_1)}(x_v)|=O(\|\Delta_n\|^{r-j_1}\omega(f^{(r)},\ \|\Delta_n\|))$

定理2 在定理1的任一条件下，$l\leq r\leq s$，$f(x)\in C^r[0,\ 1]$，则

$$\|S_{\Delta_n}^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)\|=O(\|\Delta_n\|^{r-p}\omega(f^{(r)},\ \|\Delta_n\|))\qquad p\leq j_1$$

若$\max h_v/\min h_v\leq\beta<+\infty$，则$\|S_{\Delta_n}^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)\|=O(\|\Delta_n^{r-p}\omega(f^{(r)},\ \|\Delta_n\|))\quad j_1<p\leq r$

$$\|S_{\Delta_n}^{(p)}(x)\|=O(\|\Delta_n\|^{r-p}\omega(f^{(r)},\ \|\Delta_n\|))\qquad p>r.$$

证明 由（2）式、（3）式及引理3，当$x_v<x<x_{v+1}$时

$$S_{\Delta_n}^{(p)}(x)-S_{\Delta_n}^{*(p)}(x)=O(h_v^{j_1-p}\|\Delta_n\|^{r-j_1}\omega(f^{(r)},\ \|\Delta_n\|))$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{从而，当}p\leq j_1\text{时，}\ \|S_{\Delta_n}^{(p)}(x)-S_{\Delta_n}^{*(p)}(x)\|=O(\|\Delta_n\|^{r-p}\omega(f^{(r)},\ \|\Delta_n\|))\\ \text{当}\max h_v/\min h_v\leq\beta<+\infty\text{时}\ \|S_{\Delta_n}^{(p)}(x)-S_{\Delta_n}^{*(p)}(x)\|=O(\|\Delta_n\|^{r-p}\omega(f^{(r)},\ \|\Delta_n\|))(p>j_1)\end{array}\right\}\quad 9$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{另一方面，由引理1，}\ \|S_{\Delta_n}^{*(p)}(x)-f^{(p)}(x)\|=O(\|\Delta_n\|^{r-p}\omega(f^{(r)},\ \|\Delta_n\|))\ p\leq r\\ \text{当}\max h_v/\min h_v\leq\beta<+\infty,\ \|S_{\Delta_n(x)}^{*(p)}\|=O(\|\Delta_n\|^{r-p}\omega(f^{(r)},\ \|\Delta_n\|))p>r\end{array}\right\}\quad (10)$$

由（9）、（10）式，即得定理的证明

注1 当$p>k$时，在节点上，定理理解为$\max\limits_{v}|S_{\Delta_n}^{(p)}(x_v\pm)-f^{(p)}(x_v)|=$

$O(\|\Delta_n\|^{r-p}\omega(f^{(r)},\ \|\Delta_n\|))$，$\max\limits_{v}|S_{\Delta_n}^{(p)}(x_v\pm)|=O(\|\Delta_n\|^{r-p}\omega(f^{(r)},\ \|\Delta_n\|))$，下同。

注2 对周期样条，一般说来，取$j_1<j_2$较理想。

若$l'<l$，$f(x)\in C^r[0,1]$，$l'\leq r<l$，我们也可得到相应的估计，对非周期样条，只需修改端点条件为

$S_{\Delta_n}^{(j_1)}(0)=(j_1-r)!\,[x_0,x_1,\cdots,x_{j_1-r}]f^{(r)},S_{\Delta_n}^{(j_1)}(1)=(j_1-r)!\,[x_{n-(j_1-r)},\cdots,x_n]f^{(r)}$，(11)

为此，我们引进：

设$f(x)\in C^{l'}[0,1]$，$\overline{S}_{\Delta_n}(x)=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j\in F}h_v^j f^{(j)}(x_{v+i})V_{i,j}(\frac{x-x_v}{h_v})$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{s}h_v^j f^{(j)}(t_{v,i})U_{i,j}(\frac{x-x_v}{h_v}). \tag{12}$$

引理4 若$l'<l$，$f(x)\in C^r[0,1]$，$l'\le r<l$，则当$x_v<x<x_{v+1}$时，

（1） $\|\overline{S}_{\Delta_n}^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)\|=O(h_v^{r-p}\omega(f^{(r)};h_v))$ $p\le r$，

（2） $\|\overline{S}_{\Delta_n(x)}^{(p)}\|=O(h_v^{r-p}\omega(f^{(r)},h_v))$ $p>r$。

证明 只需注意到此时$j_1>r$、$r\le s$，及$U_{i,j}(x)\equiv 0$，$i=1,\cdots,m$，$j>r$，

就有$\overline{S}_{\Delta_n}(x)=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{r}h_v^j f^{(j)}(x_{v+i})V_{i,j}(\frac{x-x_v}{h_v})+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{r}h_v^j f^{(j)}(t_{v,i})U_{i,j}(\frac{x-x_v}{h_v})$

$=\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{r}h_v^j f^{(j)}(t_{v,i})U_{i,j}(\frac{x-x_v}{h_v})$。余下的证明与引理1同。

引理5 在定理1的任一条件下，$l'<l$，$f(x)\in C^r[0,1]$，$l'\le r<l$，$\max h_v/\min h_v\le\beta<+\infty$，则$\max_{0\le v\le n}|S_{\Delta_n}^{(j_1)}(x_v)|=O(\|\Delta_n\|^{r-j_1}\omega(f^{(r)},\|\Delta_n\|))$。

证明 运用引理4当$j_2\le r$时，$\max_{1\le v\le n-1}|\overline{S}_{\Delta_n}^{(j_2)}(x_v+)-S_{\Delta_n}^{(j_2)}(x_v-)|\le$

$\max_{1\le v\le n-1}|\overline{S}_{\Delta_n}^{(j_2)}(x_v+)-f^{(j_2)}(x_v)|+\max_{1\le v\le n-1}|\overline{S}_{\Delta_n}^{(j_2)}(x_v-)-f^{(j_2)}(x_v)|=O(\|\Delta_n\|^{r-j_2}\omega(f^{(r)},\|\Delta_n\|))$。

当$j_2>r$时，$\max_{1\le v\le n-1}|\overline{S}_{\Delta_n}^{(j_2)}(x_v+)-\overline{S}_{\Delta_n}^{(j_2)}(x_v-)|=O(\|\Delta_n\|^{r-j_2}\omega(f^{(r)},\|\Delta_n\|))$。

由（6）式、（7）式及（12）式，并结合端点条件\）或（11），注意到边界条件（11），定理1仍成立，$\max_{0\le v\le n}|S_{\Delta_n}^{(j_1)}(x_v)|=O(\|\Delta_n\|^{r-j_1}\omega(f^{(r)},\|\Delta_n\|))$。

定理3 在定理1的任一条件下，$l'<l$，$f(x)\in C^r[0,1]$，$l'\le r<l$，$\max h_v/\min h_v\le\beta<+\infty$，则

$$\begin{cases}\|f^{(p)}(x)-S_{\Delta_n}^{(p)}(x)\|=O(\|\Delta_n\|^{r-p}\omega(f^{(r)},\|\Delta_n\|)) & p\le r,\\ \|S_{\Delta_n}^{(p)}(x)\|=O(\|\Delta_n\|^{r-p}\omega(f^{(r)},\|\Delta_n\|)) & p>r.\end{cases}$$

证明 由（2）式，（12）式及引理5，注意到对边界条件（11）定理1仍成立，

$$\|S_{\Delta_n}^{(p)}(x)-\overline{S}_{\Delta_n}^{(p)}(x)\|=O(\|\Delta_n\|^{r-p}\omega(f^{(r)},\|\Delta_n\|)). \tag{13}$$

由引理4，

$$\left.\begin{array}{ll}\|\overline{S}_{\Delta_n}^{(p)}(x)-f^{(p)}(x)\|=O(\|\Delta_n\|^{r-p}\omega(f^{(r)},\|\Delta_n\|)) & p\le r\\ \|\overline{S}_{\Delta_n}^{(p)}(x)\|=O(\|\Delta_n\|^{-p}\omega(f^{(r)},\|\Delta_n\|)) & p>r\end{array}\right\} \tag{14}$$

由（13）、（14）式，即得定理的证明。

定理4 在定理1（1）条件下，$f(x)\in C^r[0,1]$，$r>s$，则对周期样条有下列渐近展开

$$f^{(p)}(x)-S_n^{(p)}(x)=\sum_{q=s+1}^{r}h^{q-p}f^{(q)}(x)\Big\{\varphi_{q,p}(\frac{x-x_v}{h})$$

$$-\sum_{l=s+1}^{q}\frac{1}{(q-l)!}\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{s}\varphi_{l,j}^{a}(\frac{t_{v,i}-x}{h})^{q-j}U_{i,j}^{(p)}(\frac{x-x_v}{h})$$

$$-\frac{1}{C_l}\sum_{l=s+1}^{q}\frac{\psi_l}{(q-l)!}\Big[(\frac{x_v-x}{h})^{q-l}V_{0,j_1}^{(p)}(\frac{x-x_v}{h})+(\frac{x_{v+1}-x}{h})^{q-l}\cdot$$

$$V_{1,j_1}^{(p)}(\frac{x-x_v}{h})\Big]\Big\}+O(h^{r-p}\omega(f^{(r)},h)),\quad x\in(x_v,x_{v+1}),\quad p\le s,$$

其中，$\varphi_{q,p}(x)$ 由引理 2 给出，$\psi_{s+1}=\phi_{s+1}$，$\psi_q=\phi_q-\sum_{j=s+1}^{q-1}\psi_j\frac{C_2+(-1)^{q-j}C_1}{(q-j)!\,C}$，$q\geq s+2$，

$$\phi_q=\varphi_{q,j_2}(1)-\varphi_{q,j_2}(0)+\sum_{l=s+1}^{q}\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{s}\frac{1}{(q-l)!}\varphi_{l,j}(a_i)\Big[a_i^{q-l}U_{i,j}^{(j_2)}(0)-(-1)^{q-l}\cdot(1-a_i)^{q-l}U_{i,j}^{(j_2)}(1)\Big],\quad q\geq s+1;$$

$C_0=V_{1,j_1}^{(j_2)}(1)-V_{0,j_1}^{(j_2)}(0)$，$C_1=V_{0,j_1}^{(j_2)}(1)$，$C_2=-V_{1,j_1}^{(j_2)}(0)$，$C=C_0-C_1+C_2$.

证明 下列Taylor公式将是有用的

$$\left.\begin{aligned}
f^{(q)}(t_{v,i})&=\sum_{l=q}^{r}\frac{f^{(l)}(x_v)}{(l-q)!}(a_ih)^{l-q}+O(h^{r-q}\omega(f^{(r)},h))\qquad q\leq r\\
f^{(q)}(t_{v-1,i})&=\sum_{l=q}^{r}\frac{f^{(l)}(x_v)}{(l-q)!}(-1)^{l-q}[(1-a_i)h]^{l-q}+O(h^{r-q}\omega(f^{(r)},h)),\ q\leq r\\
f^{(q)}(t_{v,i})&=\sum_{l=q}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{(l-q)!}(t_{v,i}-x)^{l-q}+O(h^{r-q}\omega(f^{(r)};h)),\ q\leq r,\ x\in(x_v,x_{v+1})
\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

由（6）式，
$$V_{0,j_1}^{(j_2)}(1)\Big[S_n^{(j_1)}(x_{v-1})-f^{(j_1)}(x_{v-1})\Big]+\Big[V_{1,j_1}^{(j_2)}(1)-V_{0,j_1}^{(j_2)}(0)\Big]\cdot\Big[S_n^{(j_1)}(x_v)-f^{(j_1)}(x_v)\Big]-V_{1,j_1}^{(j_2)}(0)\Big[S_n^{(j_1)}(x_{v+1})-f^{(j_1)}(x_{v+1})\Big]=h^{j_2-j_1}\Big[S_n^{*(j_2)}(x_v+)-S_n^{*(j_2)}(x_v-)\Big].\tag{16}$$

由引理 2，
$$f^{(j_2)}(x_v)-S_n^{*(j_2)}(x_v+)=\sum_{q=s+1}^{r}h^{q-j_2}\Big[f^{(q)}(x_v)\varphi_{q,j_2}(0)-\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{s}f^{(q)}(t_{v,i})\varphi_{q,j}(a_i)\cdot U_{i,j}^{(j_2)}(0)\Big]+O(h^{r-j_2}\omega(f^{(r)};h)),$$

$$f^{(j_2)}(x_v)-S_n^{*(j_2)}(x_v-)=\sum_{q=s+1}^{r}h^{q-j_2}\Big[f^{(q)}(x_v)\varphi_{q,j_2}(1)-\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{s}f^{(q)}(t_{v-1,i})\varphi_{q,j}(a_i)\cdot U_{i,j}^{(j_2)}(1)\Big]+O(h^{r-j_2}\omega(f^{(r)},h)).$$

由（15）式，（16）式右端成为
$$\sum_{q=s+1}^{r}h^{q-j_1}f^{(q)}(x_v)\Big\{\varphi_{q,j_2}(1)-\varphi_{q,j_2}(0)+\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{s}\sum_{l=s+1}^{q}\frac{1}{(q-l)!}\varphi_{l,j}(a_i)\Big[a_i^{q-l}U_{i,j}^{(j_2)}(0)-(-1)^{q-l}(1-a_i)^{q-l}U_{i,j}^{(j_2)}(1)\Big]\Big\}+O(h^{r-j_1}\omega(f^{(r)},h)).$$

因此，连续性方程成为
$$C_1\Big[S_n^{(j_1)}(x_{v-1})-f^{(j_1)}(x_{v-1})\Big]+C_0\Big[S_n^{(j_1)}(x_v)-f^{(j_1)}(x_v)\Big]+C_2\Big[S_n^{(j_1)}(x_{v+1})-f^{(j_1)}(x_{v+1})\Big]=\sum_{q=s+1}^{r}h^{q-j_1}f^{(q)}(x_v)\phi_q+O(h^{r-j_1}\omega(f^{(r)},h))\quad v=1,\cdots,n.\tag{17}$$

利用（15）式，上式化为

$$C_1\Big[S_n^{(j_1)}(x_{v-1})-f^{(j_1)}(x_{v-1})-\frac{1}{C}\sum_{q=s+1}^{r}h^{q-j_1}f^{(q)}(x_{v-1})\psi_q\Big]+C_0\Big[S_n^{(j_1)}(x_v)-f^{(j_1)}(x_v)-$$

$$\frac{1}{C}\sum_{q=s+1}^{r}h^{q-j_1}f^{(q)}(x_v)\psi_q\Big]+C_2\Big[S_n^{(j_1)}(x_{v+1})-f^{(j_1)}(x_{v+1})-\frac{1}{C}\sum_{q=s+1}^{r}h^{q-j_1}f^{(q)}(x_{v+1})\ \psi_q\Big]=$$

$$O(h^{r-j_1}\omega(f^{(r)};h)),\quad v=1,\cdots,n. \tag{18}$$

由方程组的对角占优性

$$\max_v\ \Big|S_n^{(j_1)}(x_v)-f^{(j_1)}(x_v)-\frac{1}{C}\sum_{q=s+1}^{r}h^{q-j_1}f^{(q)}(x_v)\ \psi_q\Big|=O(h^{r-j_1}\omega(f^{(r)};h)), \tag{19}$$

于是当$x\in(x_v,\ x_{v+1})$时，由引理2及（19）式，$0\le p\le s$，有

$$f^{(p)}(x)-S_n^{(p)}(x)=\Big[f^{(p)}(x)-S_n^{*(p)}(x)\Big]-\Big[S_n^{(p)}(x)-S_n^{*(p)}(x)\Big]$$

$$=\sum_{q=s+1}^{r}h^{q-p}\Big[f^{(q)}(x)\ \ \varphi_{q,p}(\frac{x-x_v}{h})-\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{s}f^{(q)}(t_{v,i})\ \ \varphi_{q,j}(a_i)\ \ U_{i,j}^{(p)}(\frac{x-x_v}{h})\Big]-$$

$$\frac{1}{C}\sum_{q=s+1}^{r}h^{q-p}\psi_q\ \Big[f^{(q)}(x_v)V_{0,j_1}^{(p)}(\frac{x-x_v}{h})+f^{(q)}(x_{v+1})\ \ V_{1,j_1}^{(p)}(\frac{x-x_v}{h})\Big]+O(h^{r-p}\omega(f^{(r)},\ h)).$$

利用（15）式，即得定理的证明.

至此，我们完全解决了许多类周期的和非周期的，等距的和非等距的缺插值样条之收敛速度的精确估计，对周期样条还给出了其逐项渐近展开.

参 考 文 献

〔1〕徐叔贤，计算数学，5(1983)，25—35.
〔2〕徐叔贤，计算数学，5(1983)，136—141.
〔3〕Chen Tianping, Kexue Tongbao, 25(1980)，6—8.
〔4〕Chen Tingping, Scientia Sinica, 24(1981)，606—617.
〔5〕陈天平，应用数学学报，4(1981)，253—257
〔6〕陈天平，中国科学（A辑），1983，5：389—399
〔7〕Varma, A. K., Acta Math., Acad. Sci., Hungricae, 31(1978)，185—192.
〔8〕Varma, A. K., Acta Math., Acad. Sci., Hungricae, 31(1978)，193—203
〔9〕Prasad, J. & Varma, A. K., SIAM J. Numer. Anal., 16(1979)，1075—1079.
〔10〕黄达人，计算数学，5(1983)，142—148.