不可微优化不动点算法的收敛性

唐焕文　郭　建
（大连工学院）

定义　设$f(x)$是定义在R^n上的实函数，若存在$\lambda\in[0, 1]$，使得对任意的x，$y\in R^n$，当$f(x)\leq f(y)$时，总成立：

$f(tx+(1-t)y)\leq\lambda tf(x)+(1-\lambda t)f(y)$，$\forall t\in[0, 1]$，则称$f(x)$是$R^n$上的$\lambda$次凸函数．显然，$\lambda=1$时，$f(x)$即为通常的凸函数，$\lambda=0$时，$f(x)$为拟凸函数．

考虑一般不可微数学规划问题：

$$(\mathrm{P})\qquad \min\{f(x)\,|\,c(x)\leq 0\},$$

其中，$f(x)$，$c(x)$都是R^n上的Lipschitz函数．定义集值映射$F:R^n\to P(R^n)$为$F(x)=x-M(x)$，这里

$$M(x)=\begin{cases}\partial f(x), & c(x)<0,\\ \mathrm{conv}\{\partial f(x)\cup\partial c(x)\}, & c(x)=0,\\ \partial c(x), & c(x)>0,\end{cases}$$

其中$\partial f(x)$，$\partial c(x)$分别是$f(x)$，$c(x)$在x点的广义梯度．

定理1　设f，c都是R^n上的Lipschitz函数，若水平集$\mathrm{Lev}_0c=\{x\,|\,c(x)\leq 0\}$非空有界，且存在$\lambda\in(0, 1]$使函数

$$c_0(x)=\begin{cases}c(x), & x\notin \mathrm{Lev}_0c,\\ 0 & x\in\mathrm{Lev}_0c,\end{cases}$$

是λ次凸函数，则将Merrill不动点算法用于F时，产生有界无穷点列$\{x_k\}$，且$\{x_k\}$的任何极限点x^*是问题（P）的F—J点．

又若存在某个$a<0$，$\lambda\in(0, \lambda]$，使函数

$$c_a(x)=\begin{cases}c(x), & x\notin \mathrm{Lev}_ac,\\ a, & x\in\mathrm{Lev}_ac,\end{cases}$$

是λ次凸函数．则$\{x_k\}$的任何极限点x^*都是问题（P）的K—T点．

定理2　若将Eaves-Saigal单纯同伦算法用于F，则在与定理1相同的条件下，有上述相同的结果．

参　考　文　献

〔1〕王则柯，单纯不动点算法基础，中山大学出版社，1986．
〔2〕迟宗陶、祁力群，λ次凸函数，高校计算数学学报，1(1979)．

* 1986年12月1日收到．