数学研究与评论
第七卷　第一期

关于方程 $\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{x_j}+\frac{1}{x_j\cdots x_s}=1$*

孙琦　　　曹珍富

（四川大学）　（哈尔滨工业大学）

关于方程

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{x_j}+\frac{1}{x_1\cdots x_s}=1,\quad 1<x_1<\cdots<x_s,\tag{1}$$

早在1964年，柯召和孙琦[1]就进行了研究，给出了方程（1）在$2\leq s\leq 6$时的全部解．同时证明了：设$\Omega(s)$表示方程（1）的解数，如果$x_1^0,\cdots,x_{s-1}^0$是方程（1）在s换成$s-1$时的一组解，满足$(x_1^0\cdots x_{s-1}^0)^2+1$是复合数，则$\Omega(s)<\Omega(s+1)$．1978年，孙琦[2]证明了$s\geq 4$时有$\Omega(s)<\Omega(s+1)$．利用这个结果，于1982年孙琦[3]研究了同余式组

$$x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_s+1\equiv 0\pmod{x_i},\ 1<x_1<\cdots<x_s,\ s>1,\ i=1,\cdots,s\tag{2}$$

的解．设$H(s)$表示同余式组（2）的解数，他证明了：在$s\geq 4$时，$H(s)<H(s+1)$．由此立即推出：设$s\geq 7$，则$H(s)\geq s+11$．更为有趣地是，利用〔2〕中结果，1982年，孙琦[4]完全解决了1972年捷克数学家 Znám 提出的问题：是否对每一个整数$n>1$，都存在整数$x_i>1$ $(i=1,\cdots,n)$，使得对每一个i，x_i是$x_1\cdots x_{i-1}\cdot x_{i+1}\cdots x_n+1$的真因子？在$n\geq 5$时，这个问题的回答是肯定的．

本文是在前述文献的基础上，进一步地证明了下列结果．

定理1　1）设$s\geq 10$，则$\Omega(s+1)\geq\Omega(s)+3$．

2）设$s\geq 10$，$2|s$，则$\Omega(s+1)\geq\Omega(s)+5$．

定理2　1）设$s\geq 10$，则$H(s+1)\geq H(s)+3$．

2）设$s\geq 10$，$2|s$，则$H(s+1)\geq H(s)+5$．

推论　设$s\geq 10$，则$H(s)\geq 3s-9$．

在证明定理1之前，我们先证明一个引理．这是文〔1〕中一个结果的精密化．

引理　若$x_1^{(j)},\cdots,x_{s-1}^{(j)}$ $(j=1,\cdots,\Omega(s-1))$是方程$\sum_{j=1}^{s-1}\frac{1}{x_j}+\frac{1}{x_1\cdots x_{s-1}}=1$的$\Omega(s-1)$个解，设$(x_1^{(j)}\cdots x_{s-1}^{(j)})^2+1=l_j$ $(j=1,\cdots,\Omega(s-1))$，则有

$$\Omega(s+1)\geq\Omega(s)+\sum_{j=1}^{\Omega(s-1)}\left(\frac{d(l_j)}{2}-1\right).$$

证　在方程

$$\sum_{j=1}^{s+1}\frac{1}{x_j}+\frac{1}{x_1\cdots x_{s-1}}=1\tag{3}$$

* 1981年6月5日收到．

中令$x_i = x_i^{(j)}$，$i = 1, \cdots, s-1$，于是得

$$\sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{x_i^{(j)}} + \frac{1}{x_s} + \frac{1}{x_{s+1}} + \frac{1}{x_1^{(j)} \cdots x_{s-1}^{(j)} x_s x_{s+1}} = 1,$$

即得

$$(x_s - x_1^{(j)} \cdots x_{s-1}^{(j)})(x_{s+1} - x_1^{(j)} \cdots x_{s-1}^{(j)}) = (x_1^{(j)} \cdots x_{s-1}^{(j)})^2 + 1 = l_j,$$

因为l_j不是平方数，故$d(l_j)$是偶数．$\frac{d(l_j)}{2}$对l_j的因子$f_j, \frac{l_j}{f_j}$，给出方程（3）的$\frac{d(l_j)}{2}$个解，总共给出$\sum_{j=1}^{\Omega(s-1)} \frac{d(l_j)}{2}$个解．因为当$u_1, \cdots, u_t$是（1）在$s = t$时的一组解时，$u_1, \cdots, u_t, u_1 \cdots u_t + 1$是（1）在$s = t+1$时的一组解，故$\Omega(s)$个（1）的解也可给出$\Omega(s)$个（3）的解，但其中有$\Omega(s-1)$个且仅有$\Omega(s-1)$个已在前述$\sum_{j=1}^{\Omega(s-1)} \frac{d(l_j)}{2}$中计算过（即$x_i = x_i^{(j)}$（$i = 1, \cdots, s-1$），$x_s = x_1^{(j)} \cdots x_{s-1}^{(j)} + 1, x_{s+1} = x_1^{(j)} \cdots x_{s-1}^{(j)} + l_j$，$j = 1, \cdots, \Omega(s-1)$），故得

$$\Omega(s+1) \geq \Omega(s) - \Omega(s-1) + \sum_{j=1}^{\Omega(s-1)} \frac{d(l_j)}{2} = \Omega(s) + \sum_{j=1}^{\Omega(s-1)} \left(\frac{d(l_j)}{2} - 1\right).$$

这就证明了引理．

定理1的证明　因为2，3，11，23，31是方程（1）在$s = 5$时的一组解，故由文献〔1〕知，$x_1 = 2$，$x_2 = 3$，$x_3 = 11$，$x_4 = 23$，$x_5 = 31$，$x_l = x_1 \cdots x_{l-1} + 1$（$l = 6, \cdots, s-1$，$s \geq 7$）是方程

$$\sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{x_j} + \frac{1}{x_1 \cdots x_{s-1}} = 1 \tag{4}$$

的一组解．在$2 \nmid s$，$s \geq 7$时易证$x_1 \cdots x_{s-1} \equiv 2 \pmod 5$，因此$(x_1 \cdots x_{s-1})^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$．

取$x_1 = 2$，$x_2 = 3$，$x_3 = 7$，$x_4 = 47$，$x_5 = 403$，$x_6 = 19403$．记$\eta = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 403 \cdot 19403$，由于$\eta(\eta+1) \equiv 2 \pmod 5$，可令$\eta(\eta+1) = 5\lambda + 2$．又由于

$$\frac{1}{5\lambda+2} = \frac{1}{5\lambda+7} + \frac{1}{5\lambda^2+9\lambda+3} + \frac{1}{(5\lambda+2)(5\lambda+7)(5\lambda^2+9\lambda+3)}, \tag{5}$$

故设$x_7 = \eta + 1$，$x_8 = 5\lambda + 7$，$x_9 = 5\lambda^2 + 9\lambda + 3$，则$x_1, \cdots, x_9$是（1）在$s = 9$时的一组解．设$x_l = x_1 \cdots x_{l-1} + 1$（$l = 10, \cdots, s-1, s \geq 11$），则$x_1, \cdots, x_{s-1}$是（4）的解，而且在$2 \nmid s$，$s \geq 11$时$x_1 \cdots x_{s-1} \equiv 2 \pmod 5$，故$(x_1 \cdots x_{s-1})^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$．

再取$x_1 = 2$，$x_2 = 3$，$x_3 = 7$，$x_4 = 47$，$x_5 = 583$，$x_6 = 1223$．记$\varepsilon = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 583 \cdot 1223$，由于$\varepsilon(\varepsilon+1) \equiv 2 \pmod 5$，可设$\varepsilon(\varepsilon+1) = 5\lambda + 2$，则由（5）式和$x_1, \cdots, x_6$，$x_7 = \varepsilon + 1$，$x_8 = 5\lambda + 7$，$x_9 = 5\lambda^2 + 9\lambda + 3$是方程（1）在$s = 9$时的一组解，故在$2 | s$，$s \geq 11$时，$x_1, \cdots, x_9, x_{10} = x_1 \cdots x_9 + 1, \cdots, x_{s-1} = x_1 \cdots x_{s-2} + 1$是（4）的一组解，并且有$x_1 \cdots x_{s-1} \equiv 2 \pmod 5$．故$(x_1 \cdots x_{s-1})^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$．

这就证明了：在$2 \nmid s$，$s \geq 11$时，至少存在三组$x_1^{(j)}, \cdots, x_{s-1}^{(j)}$使得

$$l_j = (x_1^{(j)} \cdots x_{s-1}^{(j)})^2 + 1 = 5 \cdot \frac{(x_1^{(j)} \cdots x_{s-1}^{(j)})^2 + 1}{5},$$

而对这三组的每一组都有$d(l_i)\geq 4$，其他显然$d(l_j)\geq 2$，故由引理知在$2|s$，$s\geq 11$时有

$$\Omega(s+1)\geq\Omega(s)+3.$$

在$2|s$时，我们将找出五组$x_1,\cdots,x_{s-1}$是（4）的解，满足$(x_1\cdots x_{s-1})^2+1\equiv 0\pmod 5$．从而证完定理1．

取$x_1=2$，$x_2=x_1+1$，$\cdots$，$s_{s-1}=x_1\cdots x_{s-2}+1$，$s\geq 4$，则$x_1,\cdots,x_{s-1}$显然是（4）的一组解．在$2|s$，$s\geq 4$时$x_1\cdots x_{s-1}\equiv 2\pmod 5$，故$(x_1\cdots x_{s-1})^2+1\equiv 0\pmod 5$．

取$x_1=2$，$x_2=3$，$x_3=7$，$x_4=43$，$x_5=1823$，$x_6=193667$，$x_7=x_1\cdots x_6+1$，$\cdots$，$x_{s-1}=x_1\cdots x_{s-2}+1$，$s\geq 8$，则在$2|s$，$s\geq 8$时有$x_1\cdots x_{s-1}\equiv 2\pmod 5$．因此$(x_1\cdots x_{s-1})^2+1\equiv 0\pmod 5$．

取$x_1=2$，$x_2=3$，$x_3=7$，$x_4=47$，$x_5=403$，$x_6=19403$，$x_7=x_1\cdots x_6+1$，$\cdots$，$x_{s-1}=x_1\cdots x_{s-2}+1$，$s\geq 8$，则在$2|s$，$s\geq 8$时有$x_1\cdots x_{s-1}\equiv 2\pmod 5$ 因此$(x_1\cdots x_{s-1})^2+1\equiv 0\pmod 5$．

取$x_1=2$，$x_2=3$，$x_3=7$，$x_4=47$，$x_5=583$，$x_6=1223$，$x_7=x_1\cdots x_6+1$，$\cdots$，$x_{s-1}=x_1\cdots x_{s-2}+1$，$s\geq 8$，则在$2|s$，$s\geq 8$时有$x_1\cdots x_{s-1}\equiv 2\pmod 5$，从而$(x_1\cdots x_{s-1})^2+1\equiv 0\pmod 5$．

最后，取$x_1=2$，$x_2=3$，$x_3=11$，$x_4=23$，$x_5=31$，记$\delta=2\cdot 3\cdot 11\cdot 23\cdot 31$，则$\delta(\delta+1)\equiv 2\pmod 5$．令$\delta(\delta+1)=5\lambda+2$，$x_6=\delta+1$，$x_7=5\lambda+7$，$x_8=5\lambda^2+9\lambda+3$，则由（5）式知$x_1,\cdots,x_8$是（1）在$s=8$时的一组解．设$x_9=x_1\cdots x_8+1$，$\cdots$，$x_{s-1}=x_1\cdots x_{s-2}+1$，$s\geq 10$，则在$2|s$，$s\geq 10$时$x_1\cdots x_{s-1}\equiv 2\pmod 5$，于是$(x_1\cdots x_{s-1})^2+1\equiv 0\pmod 5$．

这就证明了定理1．

定理2的证明 由（2）显然$(x_i,x_j)=1$，$1\leq i<j\leq n$，故（2）给出$\sum_{i=1}^{s}x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_s+1\equiv 0\pmod{x_i}$，$i=1,\cdots,s$，即有$\sum_{i=1}^{s}x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_s+1\equiv 0\pmod{x_1\cdots x_s}$．设

$$\sum_{i=1}^{s}x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_s+1=yx_1\cdots x_s,\tag{6}$$

这里y是正整数．（6）给出

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{x_j}+\frac{1}{x_1\cdots x_s}=y,\quad 1<x_1<\cdots<x_s,\ y>0,\tag{7}$$

由（7）知$y\leq\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{s}+\frac{1}{s!}=T(s)$．设（7）的解数为$\Omega_y(s)$，$\Omega_1(s)=\Omega(s)$，则$H(s)=\sum_{y=1}^{[T(s)]}\Omega_y(s)$．由于显然有$\Omega_y(s)\leq\Omega_y(s+1)$，故由定理1立得

$$H(s+1)=\sum_{y=1}^{[T(s+1)]}\Omega_y(s+1)\geq\sum_{y=1}^{[T(s)]}\Omega_y(s+1)$$

$$\geq \begin{cases} \sum_{y=1}^{[T(s)]} \Omega_y(s) + 3 = H(s) + 3, & \text{当} s \geq 10 \text{时}; \\ \sum_{y=1}^{[T(s)]} \Omega_y(s) + 5 = H(s) + 5, & \text{当} s \geq 10,\ 2 \mid s \text{时}. \end{cases}$$

推论的证明 由文〔3〕的结果可推出$H(10) \geq 21$．故由定理2的1）得

$H(s) \geq H(s-1) + 3 \geq H(s-2) + 2 \cdot 3 \geq \cdots \geq H(s-t) + t \cdot 3$，令$s-t=10$，则 $H(s) \geq H(10) + 3(s-10) \geq 3s-9$．

顺便指出，在$s \geq 10$时，本文得到三组 Znám 问题的解$1 < x_1 < \cdots < x_s$．

参 考 文 献

〔1〕柯召、孙琦，关于单位分数表1的问题，四川大学学报（自然科学版），1（1964），13—23．

〔2〕孙琦，关于单位分数表1的表法个数，四川大学学报（自然科学版），2—3（1978），15—18．

〔3〕孙琦，关于一组同余式的解，科学通报，19（1982），1159—1160．

〔4〕孙琦，关于Znám问题，四川大学学报（自然科学版），4（1983），9—11．

On the Equation $\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{x_j} + \frac{1}{x_1 \cdots x_s} = 1$

Sun Qi and *Cao Zhenfu*

Abstract

For the equation

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{x_j} + \frac{1}{x_1 \cdots x_s} = 1,\quad 1 < x_1 < \cdots < x_s \tag{1}$$

and the system of congruences

$$x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_s + 1 \equiv 0 \pmod{x_i},\ 1 < x_1 < \cdots < x_s,\ s > 1,\ i = 1, \cdots, s. \tag{2}$$

Let $\Omega(s)$ be the number of solutions of the equation (1), and let $H(s)$ be the number of solutions of the system of congruences (2), we prove the following theorems in this paper:

Theorem 1. 1) If $s \geq 10$, then $\Omega(s+1) \geq \Omega(s) + 3$. 2) If $s \geq 10$, $2 \mid s$, then $\Omega(s+1) \geq \Omega(s) + 5$.

Theorem 2. 1) If $s \geq 10$, then $H(s+1) \geq H(s) + 3$. 2) If $s \geq 10$, $2 \mid s$, then $H(s+1) \geq H(s) + 5$.

Corollary. If $s \geq 10$, then $H(s) \geq 3s - 9$.