Riemann流形上Killing向量场的零点*

梅 向 明
（北京师范学院）

一、引 言

命M是偶维定向紧致Riemann流形．M上Killing向量场的零点首先由S.Kobayashi所研究〔1〕,〔2〕．P.F.Baum和J. Cheeger[3]用R.Bott〔4〕,〔5〕的方法研究了Killing向量场的零点的状况与Riemann流形Pontrjagin数之间的关系．他们工作的关键部分是作出相应的Pontrjagin形式的超渡式．但是他们是凑出了这样一个超渡式，作法上不很自然．本文中我们将沿用传统的陈-Weil的办法自然地得出这个超渡式．

我们假定本文中出现的事物都是C^∞的，并且我们只考虑实的情形．

二、Riemann流形上Killing向量场的零点

命M是一定向紧致C^∞-Riemann流形，$\dim M = 4k$，G是它的Riemann度量．它唯一地确定了切丛TM上的Riemann联络∇．设它的联络形式为ω，相应的曲率形式是$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$．命$\varphi$是$Adso(4k)$－不变的$2k$次多项式，它伴随的Pontrjagin数是$\int_M \varphi(\Omega)$．

M上的一个C^∞向量场X称为Killing向量场，如果它所生成的M上的局部单参微分同胚群保持流形的Riemann度量，这就是说，对于M上任两向量场Y，Z，我们有

$$X\cdot G(Y, Z) = G(L_X Y, Z) + G(Y, L_X Z),$$

其中$L_X Y = [X, Y]$．容易看出，当$G(X, Y) = 0$，我们有

$$G(X, L_X Y) = 0.$$

引理1 命X是M上的Killing向量场，Y是另一个向量场，则有公式

$$L_X \cdot \nabla_Y - \nabla_Y \cdot L_X = \nabla_{[X, Y]}$$

证明 见〔2〕，p. 43，引理1．

点$p \in M$称为向量场X的零点如果$X(p) = 0$．X的所有零点的集是$S = \bigcup_i Z_i$，其中Z_i是S的连通分支．Killing向量场的零点集由S·Kobayashi 所研究〔1〕．他指出：每一Z_i是M的偶余维数的全测地闭子流形．因为M紧致，所以Z_i也是紧致的并且个数有限．

三、Riemann流形的Pontrjagin 数

现在我们要给出伴随于$AdSO(4k)$－不变多项式φ的Pontrjagin 数$\int_M \varphi(\Omega)$与Killing向量场X的零点集的每一连通分支的邻近状况之间的关系．

本文的主要想法是在丛$TM|_{M-S}$上另外定义一个联络$\tilde{\nabla}$，然后用陈－Weil的方法去作

*1984年7月9日收到．

出示性式$\varphi(\Omega)$在M－S上的超渡式.

从$TM|_{M-S}$上的联络$\widetilde{\nabla}$定义如下:

$$\widetilde{\nabla}_X = i(X)\widetilde{\nabla} = L_X,\quad \widetilde{\nabla}_Y = i(Y)\widetilde{\nabla} = \nabla_Y.\ \text{其中}G(X, Y)=0.$$

其中$i(Y)$表示对于向量场Y的内积.

引理2 设联络$\widetilde{\nabla}$的联络形式为$\widetilde{\omega}$，则在M－S上，我们有

$$u = \widetilde{\omega} - \omega = \pi \otimes A_X,$$

其中$A_X = L_X - \nabla_X$，并且π是M－S上的1－形式定义为

$$\pi(Y) = \frac{G(X, Y)}{G(X, X)}$$

对于M－S上的任意向量场Y.

证明 设Y是M－S上的向量场使得$G(X, Y)=0$，则

$$(\widetilde{\omega}-\omega)(Y) = i(Y)(\widetilde{\omega}-\omega) = i(Y)(\widetilde{\nabla}-\nabla) = \widetilde{\nabla}_Y - \nabla_Y = 0,$$

因为$\pi(Y)=0$，所以$(\pi\otimes A_X)(Y)=0$，于是有

$$(\widetilde{\omega}-\omega)(Y) = 0 = (\pi\otimes A_X)(Y).$$

另一方面

$$(\widetilde{\omega}-\omega)(X) = i(X)(\widetilde{\omega}-\omega) = i(X)(\widetilde{\nabla}-\nabla) = \widetilde{\nabla}_X - \nabla_X$$
$$= L_X - \nabla_X = A_X = (\pi\otimes A_X)(X).$$

引理证毕.

推论 $\widetilde{\omega} = \omega + \pi\otimes A_X$.

引理3 设联络$\widetilde{\nabla}$的曲率形式是$\widetilde{\Omega}$，则有

$$i(X)\widetilde{\Omega} = 0.$$

证明 命Y是M－S上的向量场使得$G(X, Y)=0$，$G(X, L_XY)=0$，根据引理1有

$$i(X)\widetilde{\Omega}(Y) = \widetilde{\Omega}(X, Y) = \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X - \widetilde{\nabla}_{[X, Y]}$$
$$= L_X\nabla_Y - \nabla_Y L_X - \nabla_{[X, Y]} = 0.$$

推论 设φ是$2k$次多项式，则有

$$\varphi(\widetilde{\Omega}) = 0.$$

证明 命$Y_1, \cdots, Y_{4k-1}$是M－S上与X正交的向量场，则

$$\varphi(\widetilde{\Omega})(X, Y_1, \cdots, Y_{4k-1}) = \varphi(\underbrace{\widetilde{\Omega}, \cdots, \widetilde{\Omega}}_{2k\text{个}})(X, Y_1, \cdots, Y_{4k-1})$$
$$= \varphi(\widetilde{\Omega}(X, Y_1), \cdots) = 0.$$

现在我们来叙述和证明本文的主要结果.

定理 在M－S上存在－$(4k-1)$－形式η使得

$$\varphi(\Omega) = -d\eta.$$

证明 作联络∇和$\widetilde{\nabla}$之间的同伦∇_t，设它的联络形式是

$$\omega_t = \omega + tu,$$

其中$u = \widetilde{\omega} - \omega = \pi\otimes A_X$，则对应的曲率矩阵是

$$\Omega_t = d\omega_t + \frac{1}{2}[\omega_t, \omega_t]$$
$$= d\omega + t\,du + t[\omega, u] + \frac{t^2}{2}[u, u].$$

因为π是M－S上的1－形式，$\pi\wedge\pi=0$，因此$[u, u]=0$．则有

$$\Omega_t = \Omega + t\mathrm{d}\pi \otimes A_X + t[\omega, \pi \otimes A_X].$$

根据陈—Weil 理论，存在M－S上的（$4k-1$）形式η使得

$$\varphi(\widetilde{\Omega}) - \varphi(\Omega) = \mathrm{d}\eta,$$

其中

$$\eta = 2k\int_0^1 \varphi(u, \underbrace{\Omega_t, \cdots, \Omega_t}_{(2k-1)\text{个}})\mathrm{d}t$$

$$= 2k\int_0^1 \varphi(\pi\otimes A_X, \underbrace{\Omega + t\mathrm{d}\pi \otimes A_X + t[\omega, \pi\otimes A_X], \cdots,}_{(2k-1)})\mathrm{d}t.$$

因为1－形式π在上式中只能出现一次，所以项$t[\omega, \pi\otimes A_X]$消去了，我们得到超渡式$\eta$的明确表达式如下：

$$\eta = 2k\sum_{p=0}^{2k-1} C^p_{2k-1}\varphi(\underbrace{\Omega, \cdots, \Omega}_{P\text{个}}, \underbrace{A_X \cdots, A_X}_{(2k-P)\text{个}})\pi \wedge (\mathrm{d}\pi)^{2k-p-1}\int_0^1 t^{2k-1}\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{p=0}^{2k-1} C^p_{2k}\varphi(\underbrace{\Omega, \cdots, \Omega}_{P\text{个}}, \underbrace{A_X, \cdots, A_X}_{(2k-P)\text{个}})\pi \wedge (\mathrm{d}\pi)^{2k-p-1}.$$

因为$\varphi(\widetilde{\Omega}) = 0$，定理证毕。

四、应　用

命$S = \cup_i S_i$是紧致Riemann流形M上的Killing向量场X的零点集，$\dim M = 4k$。S的每一连通分支Z_i是余维数$2\nu_i$的全测地子流形。命$Z_{i\varepsilon}$是Z_i在M中的ε－管状邻域，ε充分小时，它可以考虑成Z_i上的法ε－实球丛，并且$Z_{i\varepsilon}$的边缘可以考虑成Z_i上的法ε－球丛，它的纤维S_ε是半径为ε的（$2\nu_i-1$）维球面。命$G^\perp$是M的Riemann度量G在法实球丛$Z_{i\varepsilon}$上的限制，$\Omega^\perp$是对应的曲率形式，$E(\Omega^\perp)$是法丛$Z_{i\varepsilon}$的Euler形式（注意Z_i的余维数是偶数），$A_X^\perp$是算子A_X在$Z_{i\varepsilon}$上的限制，则有

Bott-Baum-Cheeger 定理：$\int_M \varphi(\Omega) = \sum_i \int_{Z_i} \dfrac{\varphi(t\Omega + A_X)}{E(t\Omega^\perp + A_X^\perp)}$的Taylor展式中$t^{2k-\nu_i}$的系数。

证明 $\eta = \sum_{p=0}^{2k-1} C^p_{2k}\varphi(\underbrace{\Omega, \cdots, \Omega}_{p\text{个}}, \underbrace{A_X, \cdots, A_X}_{(2k-p)\text{个}})\pi \wedge (\mathrm{d}\pi)^{2k-p-1}$

$= \varphi(t\Omega + A_X)\cdot\dfrac{\pi}{1-t\mathrm{d}\pi}$ 的Taylor展开式中t^{2k-1}的系数。

所以

$$\int_M \varphi(\Omega) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M/\cup_i Z_{i\varepsilon}}\varphi(\Omega) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M/\cup_i Z_{i\varepsilon}} -\mathrm{d}\eta$$

$= \sum_i \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial Z_{i\varepsilon}}\eta = \sum_i \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{Z_i}\int_{S_\varepsilon}\varphi(t\Omega + A_X)\cdot\dfrac{\pi}{1-t\mathrm{d}\pi}$的Taylor展开式中$t^{2k-1}$的系数

$= \sum_i \int_{Z_i}\{\varphi(t\Omega + A_X)\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\dfrac{\pi}{1-t\mathrm{d}\pi}\}$ 的Taylor展开式中t^{2k-1}的系数。

根据下列Bott〔5〕给出的

引理 4 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\frac{\pi}{1-td\pi}=\frac{t^{r_i-1}}{E(t\Omega^{\perp}+A_X^{\perp})}$

证明 见〔2〕，$p.p.72—75$．在证明中，我们要用到：每一Z_i是M的全测地子流形的的结果．

根据这个引理，

$$\int_M\varphi(\Omega)=\sum_i\int_{Z_i}\varphi(t\Omega+A_X)\cdot\frac{1}{E(t\Omega^{\perp}+A_X^{\perp})}$$的Taylor展开式中$t^{(2k-1)-(r_i-1)}$的系数．

定理证毕．

参 考 文 献

〔1〕S. Kobayashi, Fixed points of isometries, Nagoya Math. J., 13(1958), 63—68.

〔2〕S. Kobayashi, Transformation Groups in Differential Geometry, Springer Verlag, 1972.

〔3〕P. F. Baum-J. Cheeger, Infinitesmal isometries and Pontrjagin numbers, Topology, 8(1969), 173—193.

〔4〕R. Bott, Vector fields and characteristic numbers, Michigan Math. J., 14(1967), 231—244.

〔5〕R. Bott, A residue formula of holomorphic vector fields, J. Diff. Geometry, 1(1967), 311—330.

〔6〕P. F. Baum-R. Bott, On the zeros of meromorphic vector fields, Essay on Topology and related topics, Memoires de G. de Rham, 1970, 29—47.