SOR和AOR迭代收敛的新判别准则

曾 文 平
（华侨大学）

众所周知，若系数矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则求解线性方程组

$$AX=b \tag{1}$$

的Jacobi迭代与Gauss-Seidel迭代收敛的充分条件是

1° 系数矩阵A严格对角占优，即

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|<1 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

2° 系数矩阵A不可约弱对角占优，即

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\leq 1 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

且至少其中一个不等式严格成立．

3° 系数矩阵A的主对角元a_{ii}全不为0（$i=1,2,\cdots,n$）且满足条件[1]、[2]

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^2\leq 1 \tag{4}$$

充分条件1°和2°，对于SOR迭代（$0<\omega\leq 1$）[3]和AOR迭代（$0\leq r\leq 1$，$0<\omega\leq 1$）[4]也是适用的．那么，充分条件3°对于SOR迭代和AOR迭代是否适用呢？迄今为止尚没有讨论过．这里我们给予肯定的回答．我们的结论基于如下两个引理．

引理1[2] 如果A的主对角元全不为零，且满足条件（4），则$\det A\neq 0$．

引理2 对线性方程组（1）的迭代法

$$X^{(m+1)}=BX^{(m)}+G \tag{5}$$

对任意初始向量收敛的充要条件是迭代矩阵B的谱半径

$$\rho(B)=\max_{1\leq i\leq n}|\lambda_i(B)|<1 \tag{6}$$

设方程组（1）的系数矩阵$A=D-E-F$，其中D为A的主对角元方阵，$-E$及$-F$分别表示A的严格下三角阵与严格上三角阵，则SOR迭代矩阵为$L_\omega=(D-\omega E)^{-1}\{(1-\omega)D+\omega F\}$，我们有

* 1984年12月30日收到．

定理1 当 $0<\omega\leq 1$ 时，且系数矩阵 A 的主对角元 a_{ii} 全不为零，并满足条件（4），则对方程组 $AX=b$ 的SOR迭代收敛．

证 若 $0<\omega\leq 1$，设 $|\lambda|\geq 1$，则 $1-\omega-\lambda\neq 0$，从而 $\left|\dfrac{\omega}{\lambda+\omega-1}\right|\leq\left|\dfrac{\omega\lambda}{\lambda+\omega-1}\right|\leq 1$.
再由条件（4）易得

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{i-1}\left|\frac{\omega\lambda}{\lambda+\omega-1}\cdot\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^{2}+\sum_{j=i+1}^{n}\left|\frac{\omega}{\lambda+\omega-1}\cdot\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^{2}\right\}\leq 1$$

由引理1知，此时 $\det\{(1-\omega-\lambda)D+\omega F+\omega\lambda E\}\neq 0$，这表明矩阵 $(1-\omega-\lambda)D+\omega F+\omega\lambda E$ 从而SOR迭代矩阵 $L_\omega=(D-\omega E)^{-1}\{(1-\omega)D+\omega F\}$ 不可能有特征根 $|\lambda_i|\geq 1$，所以 $\rho(L_\omega)=\max\limits_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|<1$，由引理2知SOR迭代收敛，证毕．

若记 $L=D^{-1}E$，$U=D^{-1}F$，则A. Hadjidimos在文〔4〕中提出的解方程组（1）的AOR方法的迭代矩阵为 $L_{r,\omega}=(I-rL)^{-1}\{(1-\omega)I+(\omega-r))L+\omega U\}$，则有

定理2 若方程组 $AX=b$ 的系数矩阵 A 的主对角元 a_{ii} 全不为0，且满足条件（4），则当 $0\leq r\leq 1$ 且 $0<\omega\leq 1$ 时，AOR迭代收敛．

证 若 $|\lambda|\geq 1$，当 $0\leq r\leq 1$，且 $0<\omega\leq 1$ 时有 $1-\omega-\lambda\neq 0$，从而 $\left|\dfrac{\omega}{1-\omega-\lambda}\right|\leq 1$ 及 $\left|\dfrac{\omega-r+\lambda r}{\omega+\lambda-1}\right|\leq 1$，再由条件（4）易得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\left|\frac{\omega-r+\lambda r}{\omega+\lambda-1}\cdot\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^{2}+\sum_{j=i+1}^{n}\left|\frac{\omega}{\omega+\lambda-1}\cdot\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^{2}\right)\leq 1$$

由引理1可知

$\det Q=\det\left\{I-\dfrac{\omega-r+\lambda r}{\omega+\lambda-1}L-\dfrac{\omega}{\omega+\lambda-1}U\right\}\neq 0$ 由此表明矩阵 $Q=I-\dfrac{\omega-r+\lambda r}{\omega+\lambda-1}L-\dfrac{\omega}{\omega+\lambda-1}U$，从而迭代矩阵 $L_{r,\omega}=(I-rL)^{-1}\{(1-\omega)I+(\omega-r)L+\omega U\}$ 不可能有特征根 $|\lambda_i|\geq 1$，所以 $\rho(L_{r,\omega})=\max\limits_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|<1$，由引理2知AOR方法收敛．

注1 当 $r=\omega$ 时，AOR方法即为SOR方法，故定理1为定理2的特例．

注2 当 $r=0$，$\omega=1$ 及 $r=1$，$\omega=1$ 时AOR迭代即分别为Jacobi迭代及Gauss-Seidel迭代，故文〔1〕、〔2〕的结果为定理2的特例．

注3 综上所述，当系数矩阵 A 满足条件（4）时，Jacobi迭代、Gauss-Seidel迭代、SOR迭代（$0<\omega\leq 1$）及AOR迭代（$0\leq r\leq 1$，$0<\omega\leq 1$）这四个迭代同时收敛．

数值例子 方程组

$$\begin{pmatrix}1 & 0.1 & -0.2 & 0.4\\ 0.2 & 1 & 0.3 & -0.1\\ -0.3 & 0.2 & 1 & -0.6\\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -7\\ 9\\ 8.4\end{pmatrix}$$

这时系数矩阵既非严格对角占优，也非弱对角占优，不能用充分条件1°及2°判别．但易知其

满足条件（4），因而由本文结果知，用Jacobi迭代、Gauss-Seidel迭代及SOR迭代（$0<\omega\leq 1$）和AOR迭代（$0\leq r\leq 1$，$0<\omega\leq 1$）解此方程组均收敛

参 考 文 献

〔1〕北京大学、吉林大学、南京大学合编，计算方法，北京，人民教育出版社，1961.

〔2〕孙澈，关于Gauss和Seidel迭代过程的一点注记，南开大学学报（自然科学），Vol 5，No 4，1964.

〔3〕清华大学、北京大学合编，计算方法，北京，科学出版社，1980.

〔4〕A. Hadjidimos, Accelerated overrelaxation method, Math. Comp., Vol. 32, No 141, 1978.

New Criteria of Convergence of the SOR and AOR Iterations

Zeng Wenping

(Huaqiao University)

Abstract

In this paper, the writer puts forward a new criteria for convergences of the SOR and the AOR iterations. This criteria widen the discrimination range of iteration convergences. A numerical example is cited.