一类次正常算子的表示*

李　绍　宽

（华东纺织工学院）

〔1〕中提出如下的问题：若S是Hilbert空间H上次正常算子，而且S^*S-SS^*是有限秩算子．能否给出S的一般形式．当S^*S-SS^*是一秩算子时，$S=aI+bU_-$，这儿U_-是单向平移算子．在〔2〕中对自对偶次正常算子情况，给出了一个表示．这里我们从另一个角度来部分回答上述问题．

Hilbert空间H上算子S称为次正常算子是指存在一个Hilbert空间$\mathrm{R}\supset\mathrm{H}$上正常算子$N$，$N\mathrm{H}\subset\mathrm{H}$，而$S=N|_{\mathrm{H}}$．称$N$为$S$的正常延拓，相对于$\mathrm{R}=\mathrm{H}\oplus\mathrm{H}^{\perp}$，正常算子$N$有表示

$$N=\begin{pmatrix}S & X\\ 0 & T^*\end{pmatrix},\qquad N^*=\begin{pmatrix}S^* & 0\\ X^* & T\end{pmatrix}.$$

而由N正常性可知

$$S^*S-SS^*=XX^*,\quad XT=S^*X.$$

因此$\ker(S^*S-SS^*)=\ker X^*$对S是不变的．由此可知

引理1　若S是完全非正常的次正常算子．$D_0=S^*S-SS^*$．那么存在分解$\mathrm{H}=\mathrm{H}_1\oplus\mathrm{H}_2\oplus\mathrm{H}_3\oplus\cdots$，而相对于这个分解．$S$有表示

$$S=\begin{pmatrix}S_1 & & & \\ X_1 & S_2 & & \\ & X_2 & S_3 & \\ & & \ddots & \ddots\end{pmatrix}$$

其中X_i：$\mathrm{H}_i\to\mathrm{H}_{i-1}$满足$\mathrm{Ran}\,X_i=\mathrm{H}_{i-1}$．且

$$S_i^*S_i-S_iS_i^*=X_{i-1}X_{i-1}^*-X_i^*X_i\ (i\geq 1),\qquad X_i^*S_{i+1}=S_iX_i^*,$$

而$X_0X_0^*=S^*S-SS^*$．

下面我们主要利用这个表示定理，证明下面两个主要结果．

定理1　若S是Hilbert空间H上完全非正常的次正常算子．若$S^*S-SS^*=D_0$是有限秩投影算子，而且$S^*|_{\mathrm{Ran}\,D_0}$是正常，那么$S=N+U_-$．这儿N为正常算子，U_-是多重单向平移算子．重数等于$\mathrm{Ran}D_0$的维数，而且$NU_-=U_-N$．

证　利用引理1．由$[S_1^*,S_1]=0$导出$X_1^*X_1=D_0$是H_1上单位算子，而$\overline{\mathrm{R}(X_1)}=\mathrm{H}_2$．从而$X_1$为$\mathrm{H}_1$到$\mathrm{H}_2$上的酉算子．再由$X_1^*S_2=S_1X_1^*$可知$S_2$与$S_1$酉等价，从而$S_2$也为正常．这过程可以继续下去，导出$X_i$是$\mathrm{H}_i$到$\mathrm{H}_{i+1}$的酉算子．且$S_i$与$S_{i+1}$是酉等价的，而且$X_i^*S_{i+1}=S_iX_i^*$．从而有$S_{i+1}X_i=X_iS_i$．因此取

*1984年7月23日收到．

$$N = \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & S_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad U_+ = \begin{pmatrix} 0 & & \\ X_1 & 0 & \ddots \\ & X_2 & \ddots \end{pmatrix}$$ 满足要求.

注 （1）定理中有限秩条件在证明中并没有用到．若D_0是无限维投影，U_+是无限重单向平移算子．

（2）反之，若$S = N + U_+$，N正常，U_+是单向平移，且$NU_+ = U_+N$，S是否是次正常呢？关于这个问题有下面结果．

引理2 若$S = N + T$，N是正常，T是次正常，而且$NT = TN$，那么S也是次正常的．又若N为自共轭，T为自对偶时，那么S也是自对偶的．

证 对T有最小正常延拓$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} T & X_1 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$，易知$X_1 X_1^* = T^*T - TT^*$．由于$TN = NT$，从而可知$NX_1 X_1^* = 0$，即$NX_1 = 0$．这时取$\widetilde{N} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，那么$\widetilde{N}\widetilde{T} = \widetilde{T}\widetilde{N}$，而知$\widetilde{N}$，$\widetilde{T}$为两个可以交换的正常算子．从而$\widetilde{N} + \widetilde{T} = \begin{pmatrix} S & X_1 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$是正常算子，因此$S$为次正常算子．

又若T为自对偶，N为自共轭，那么由于对T存在正常算子X_0，使$[T^*, T] = X_0 X_0^*$，$X_0 T = T^* X_0$，从而由N自共轭和$NT = TN$可知$[S^*, S] = X_0 X_0^*$，$X_0 S = S^* X_0$．从而S也是自对偶的．

推论1 定理1中若设$S^*|_{\mathrm{Ran}D}$是自共轭算子，那么S是自对偶次正常算子．

定理2 若Hilbert空间H上算子S有引理1中的分解表示，而且S_n都是正常，那么$S = N + Q$，N为正常，Q为拟正常，而且$NQ = QN$．从而S必为次正常的．

证 对S有引理1中分解表示，而且S_n都正常，那么可取

$$N = \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & S_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & & \\ X_1 & 0 & \ddots \\ & X_2 & \ddots \end{pmatrix}$$

N显然正常．由引理1中关系和S_n正常可知

$X_n^* X_n = X_{n-1} X_{n-1}^*$ $(n > 1)$，$X_n^* S_{n+1} = S_n X_n^*$，$S_{n+1} X_n = X_n S_n$，从而可知$NQ = QN$，$Q$为拟正常，从而由引理2可知这时$S$为次正常算子．

参考文献

〔1〕J.B.Conway, Subnormal Operators, Reseach in M_{a+h}., 51, Pitnam Adva.Pub. 1981.

〔2〕黄城超，关于自对偶次正常算子，复旦学报（自）24（1985），No.2．225—233．