k-集压缩映射的延拓问题*

余庆余 姚福元
（兰州大学）

众所周知，Banach 空间X中有界闭集D上的紧连续映射F可延拓成X上的紧连续映射$\widetilde{F}$：$X\to\overline{\mathrm{co}F(D)}$，其中 $\mathrm{co}F(D)$ 记 $F(D)$ 的凸包．这个定理有着重大的作用．对k-集压缩映射有类似结果成立吗？本文就此问题进行讨论．

首先指出：以下三个命题等价．

命题1 对任意$k>0$，D上任一k-集压缩映射 $F:D\to X$可延拓成X上k-集压缩映射$\widetilde{F}$且$\widetilde{F}(X)=F(D)$．

命题2 对某固定$k_0>0$，D上任一k_0-集压缩映射$F:D\to X$可延拓成X上k_0-集压缩映射$\widetilde{F}$，且$\widetilde{F}(X)=F(D)$．

命题3 集合D是X的1-集压缩收缩核．即存在1-集压缩映射$r:X\to D$，使r在D上的局限为恒等映射．

显然，只需证从命题2可推出命题1．

证明 设G是D上任一$k(k>0)$集压缩映射，令$H=\frac{k_0}{k}G$，则H为D上k_0-集压缩映射．由假设，H可延拓成X上k_0-集压缩映射$\widetilde{H}$，作$\widetilde{G}=\frac{k}{k_0}\widetilde{H}$，则$\widetilde{G}$是定义在整个X上的$k$-集压缩映射，且$\widetilde{G}$是$G$的延拓，$\widetilde{G}(X)=G(D)$．

于是，为讨论延拓问题可代以考虑集合D成为X的1-集压缩收缩核的条件．

定理1 设$D\subset X$有界闭凸，且D的内点集非空，则D为X的1-集压缩收缩核．

证明 不失一般性．可设X的原点$O\in\mathring{D}$（D的内点集）．因D此时为凸吸收集，故Minkowskii泛函$p(x)$存在且连续．当$x\overline{\in}D$时$p(x)\geqslant1$，此时$q(x)=\frac{1}{p(x)}\leqslant1$．$q(x)$在$X-D$上连续．令

$$r(x)=\begin{cases}x & x\in D\\ q(x)x & x\overline{\in}D\end{cases}$$

则显见$r(x)$有定义且连续。下证$r:X\to D$为1-集压缩映射。对任一$A\subset D$，用$\alpha(A)$记A的非紧致度、由非紧致度的性质．因$r(A)\subset\overline{\mathrm{co}}(\{0\},A)$，故

$$\alpha(r(A))\leq\alpha(\overline{\mathrm{co}}(\{0\},A))=\alpha(A)\,.$$

由于$A\subset D$任意，上式说明r为D上1-集压缩映射．

推论1 设$D\subset X$为有界闭凸集，$\mathring{D}\neq\phi$，$F:D\to X$是k-集压缩映射（凝聚映射），则F必可延拓成X上的k-集压缩映射（凝聚映射）$\widetilde{F}:X\to F(D)$．

证明 取$\widetilde{F}=F\circ r$即可，其中$r:X\to D$如定理1中所定义．

* 1984年9月15日收到．

定理1和推论1中要求D是闭凸集且有内点，下面来分析这些条件：

（1）D是闭集的条件常常易满足．

（2）D凸这个条件不太好，但是我们有例说明，如果D不是凸集，则定理不必成立．

例（定理1中D是凸集的条件不可去）：

取 $X=M[0,1]$，即 $[0,1]$ 上所有有界可测函数的全体，范数如通常定义．对 $s\in[0,1]$ 令

$$x_s(t)=\begin{cases}1 & t\in[0,s]\\ 0 & t\in(s,1].\end{cases}$$

作X中集合

$$A=\{x_s(t)\mid s\in[0,1]\},\quad B=\{x(t)\mid \|x\|\le\frac{1}{2}\},\quad D=A\cup B.$$

显然D有内点，不凸。易知 $\forall s_1,s_2\in[0,1]$，$s_1\ne s_2$，$\|x_{s_1}-x_{s_2}\|=1$．故A中的点全为孤立点，从而A是闭集，故D闭．下证D不是X的收缩核，于是不可能是1-集压缩收缩核．设若不然，有 $r:X\to D$ 连续，且 $\forall x\in D$，$r(x)=x$．任取 $a\in A$，由 a 与A中其它点距离为1，与B中点距离不小于1/2，故由 r 的连续性可知，存在 $\delta>0$，$\forall x$，只要 $\|x-a\|<\delta$ 就有 $r(x)=a$．作

$$L_1=\{x=\lambda a\mid 0\le\lambda\le\frac{1}{2}\},\quad L_2=\{x=\lambda a\mid \frac{1}{2}\le\lambda\le1\},$$

则 $L=L_1\cup L_2$ 为连接原点和 a 的线段．显然 $L_1\subset B$．考虑 L_2 中的点，任取 $x\in L_2$，若 $r(x)\in A$ 则由前证可知，存在 x 的邻域 $U(x)$，使 $U(x)$ 中点的像均为A中同一点，称这类 $U(x)$ 为第一类．若 $r(x)\in B$，也由 r 的连续性可知，存在 x 的邻域 $U(x)$，使对任一 $u\in U(x)$，均有 $\|r(u)\|\le\frac{1}{2}$，称这类 $U(x)$ 为第二类．对一切 $x\in L_2$ 作邻域 $U(x)$，那末 $\{U(x)\}$ 将 L_2（一维有限长闭线段）复盖．由有限复盖定理，有有限个 $U_i(i\in1,2,\cdots,n)$ 使 $\bigcup_{i=1}^{n}U_i\supset L_2$．若 $\{U_i\}$ 中全为第一类，则有 $r(\frac{1}{2}a)\in A$，此与 $r(\frac{1}{2}a)=\frac{1}{2}a\in B$ 相矛盾；若 $\{U_i\}$ 中全为第二类，则推出 $r(a)\in B$．又与 $r(a)=a\in A$ 相矛盾；若 $\{U_i\}$ 中既有第一类，又有第二类，记相交二邻域为 U_0，V_0，其中 U_0 为第一类，V_0 为第二类．令 $W=U_0\cap V_0$，那么对任 $\bar{u}\in W$，既有 $r(\bar{u})\in A$，故 $\|r(\bar{u})\|=1$．又有 $r(\bar{u})\in B$，故 $\|r(\bar{u})\|=\frac{1}{2}$，矛盾．

（3）关于 $D\ne\phi$ 的要求。在某些情形，此条件可适当放宽．我们有

推论2 设 $X=X_1\oplus X_2$，$D\subset X_1$ 有界闭凸，$\mathrm{int}_{X_1}D\ne\phi$（指D有对 X_1 的相对内点），则D是X的1-集压缩收缩核．

它不难由定理1和X到 X_1 的标准投影证得，由此可得：

推论3 设X是Hilbert空间，$D\subset X$ 有界闭凸，则D是1-集压缩收缩核．

推论4 设X是Hilbert空间，$D\subset X$ 有界闭凸，则D上任一 k-集压缩映射均可延拓成X上 k-集压缩映射，且保持值域不变。

参考文献

[1] 陈文嵘，非线性泛函分析，甘肃人民出版社，1982年．