1987年2月

数学研究与评论
第七卷　第一期

空间L_p上可达范数算子问题, $0<P<1$ *

相　广　平

(南开大学)

J. Lindenstrauss 在〔1〕中定义了一个 Banch 空间具有性质A或性质B，相应地两个概念也可推广到赋 p—范空间上去．我们知道对于赋 p-范空间 X_p 和赋 q-范空间 X_q 它们算子空间 $L(X_p; X_q)$ 的拟范数定义为$\|T\|=\sup\{\|Tx\|_q: x\in S_{X_p}\}$，其中$S_{X_p}$是$X_p$的单位球，而且这个拟范数是 q—绝对齐次的．所以我们要问，p—范空间X_p是否具有性质A或性质B？即对任意 q—范空间X_q，X_p到X_q的可达范数算子全体$D(X_p, X_q)$是否稠于$L(X_p, X_q)$或$D(X_q, X_p)$稠于$L(X_q, X_p)$？下面，我们针对 p—范空间l_p（$0<p<1$）来讨论上述问题．

定理 1　设X_q是 q—范空间（$0<p<q\le 1$），则$P(l_p, X_q)$稠于$L(l_p, X_q)$．

证明　设$\{e_i\}$是l_p的标准基；$\{f_j\}$为l_p上的连续线性泛函，满足

$$f_j(e_i)=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$$

则任意 $x\in l_p$，有 $x=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x)e_i$．

首先证明：对于任意 $T\in L(l_p, X_q)$ 及任意的正数ε，存在$i_0\in\mathbf{N}$，使$\|Te_i\|\ge\|T\|-q\varepsilon/2$．事实上，若存在$\varepsilon_0>0$，使任意 $i\in\mathbf{N}$，有$\|Te_i\|\le\|T\|-\varepsilon_0$，则$\forall x=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x)e_i\in S_{l_p}$，成立着

$$\|Tx\|=\|\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x)Te_i\|\le\sum_{i=1}^{\infty}|f_i(x)|^q\|T\rho_i\|\le(\sum_{i=1}^{\infty}|f_i(x)|^p)(\|T\|-\varepsilon_0)$$

$$=\|x\|(\|T\|-\varepsilon_0)\le\|T\|-\varepsilon_0 .$$

矛盾．下面为方便起见,不妨设$\|T\|=1$．所以令$S(x)=Tx+\varepsilon f_{i0}(x)\cdot Te_{i0}$，$\forall x\in l_p$，则$S\in L(l_p, X_q)$，且

$$\|T-S\|=\sup\{\|\varepsilon\cdot f_{i_0}(x)Te_{i_0}\|: x\in S_{l_p}\}\le\varepsilon^q\cdot\|T\|\|f_{i_0}\|^q=\varepsilon^q．及$$

$$\|S(e_i)\|=\begin{cases}\|(1+\varepsilon)Te_i\| & i=i_0\\ \|Te_i\| & i\neq i_0\end{cases}$$

因此有$\|S(e_{i_0})\|\ge(1+\varepsilon)^q(\|T\|-q\varepsilon/2)=(1+\varepsilon)^q(1-q\varepsilon/2)\ge 1+q\varepsilon/4$．而 $i\neq i_0$ 时$\|S(e_i)\|=\|Te_i\|\le\|T\|=1$．所以 S 在e_{i_0}处可达范数，且 T 可用 S 来逼近．

注：定理1显然是〔2〕中主要结果的推广．

* 1984年12月7日收到．

为了给出定理 2，我们先证明以下两个引理．

引理 1　设X_q是 q —范空间（$0<p<q\leq 1$）则对任意$T\in L(X_q, l_q)$，都存在形式为$S(x)=\sum_{i=1}^{N} f_i(x)e_i$的线性算子逼近$T$，其中$f_i\in X_q^*$．

证明　因为$T\in L(X_q, l_p)$，所以存在$f_i\in X_q^*$，使$T(x)=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)e_i$，$\forall\ x\in X_q$．若存在$\varepsilon_0>0$，对于任意的$N\in\mathbf{N}$，有$\sup\{\sum_{i=N}^{\infty} |f_i(x)|^p : x\in S_{X_q}\}>\varepsilon_0$．则取$x_N\in S_{X_q}$，使$\sum_{i=N}^{\infty} |f_i(x_N)|^p>\varepsilon_0$．于是由〔3〕知：$T$不是紧算子．但事实上$T$是$X_q$到$l_q$的紧算子（见〔4〕）．矛盾．

引理 2　若Banach空间X满足"$\forall\varepsilon>0$和$\{f_1, \cdots, f_N\}\subseteq X^*$。存在有限秩射影$P$：$X^*\to X$，$\|P\|=1$，对于$i\in\{1, \cdots, N\}$，有$g_i\in X^*$，使$\|f_i-P^*g_i\|\leq(\varepsilon/N)^{1/p}$"，则X到$l_p$的任一形式为$S(x)=\sum_{i=1}^{N} f_i(x)e_i$的算子都可用可达范数算子来逼近．

证明　取$Q\in L(X, l_p)$，$Q(x)=\sum_{i=1}^{N} g_i(x)e_i$．则$\|S-QP\|=\sup\{\sum_{i=1}^{N} |f_i(x)-g_i(P x))|^p : x\in S_Z\}\leq\sum_{i=1}^{N}\sup\{|f_i(x)-(P^*\cdot g_i)(x)|^p : x\in S_Z\}\leq\sum_{i=1}^{N}\|f_i-P^*\cdot g_i\|^p\leq N((\varepsilon/N)^{1/p})^p=\varepsilon$．所以算子$S$可用$QP$来逼近．以下证明$QP$是可达范数算子．

因为P(X）是有限维Banch空间，所以存在$x_0\in S_{P(X)}$，使$\|QP\|_{P(X)}=\|QP(x_0)\|$．由于$P(X)$是X的子空间，所以$\|QP\|_{P(X)}\leq\|QP\|$，另一方面再由$\{x\in X: x\in S_X\}\supseteq\{x\in X: P(x)\in S_X\}$得$\|QP\|\leq\|QP\|_{P(X)}$．故$\|QP\|=\|PQ\|_{P(X)}=\|QP(x_0)\|$．

定理 2　设$0<p<1$：则

（1）　当X是自反的Banach空间时，$D(X, l_p)$等于$L(X, l_p)$；

（2）　当X为$C(\Omega)$或$L_1(\mu)$或$L_\infty(\mu)$时，其中Ω是紧Hausdorff空间：μ是有限测度、$P(X, l_p)$稠于$L(X, l_p)$．

证明　（1）　当X是自反Banach空间时，由于任给$T\in L(X, l_p)$，$T(S_X)$是l_p中的紧集[4]，故$T\in D(X, l_p)$；

（2）因为$C(\Omega)$、$L_1(\mu)$和$L_\infty(\mu)$满足引理 2 的条件[5]，所以由引理 1 和引理 2 知：$P(X, l_p)$稠于$L(X, l_p)$．

作为本文的结束，我们提出下面两个问题：

（1）$P(l_1, l_p)$稠于$L(l_1, l_p)$吗？$P(m, l_p)$稠于$L(m, l_p)$吗？（$0<p<1$）．

（2）当$0<p<1$时，$P(L_p, L_p)$稠于$L(L_p, L_p)$吗？

这里我们需要注意l_1是具有性质A的，L_p到L_p的有界线性算子可用积分来表示[6]．

参　考　文　献

〔1〕王光，某些赋β—范空间$B(E, E_1)$中的可达范数算子稠密性问题，山西大学学报，3：1984，pp3—11．

[2] J. Lindenstrauss, On operators which attain their norm, Isr. J. Math., 1 (1963), 139—148 .
[3] D. Przeworka-Rolewicz, S. Rolewicz, Equation in linear space. Warszawa (1968) .
[4] W. J. Stiles. Some properties of L_p, $0 < p < 1$, Studia Math., 42(1972). 109—119 .
[5] J.Johnson and J.Wolfe. Norm attaining operators, Studia Math., IXV (1979). 7—19.
[6] N. J. Kalton. The endomorphisms of L_p $(0 \leq p < 1)$. Indiana Univ. Math. J., 27(1978). 353—381 .