1987年2月

数学研究与评论
第七卷 第一期

正规Sylow p—子群的判别*

黄 强
(华中工学院)

N.Itô曾证明如下重要定理：若可解群G有级$<p-1$的忠实常特征标或G的所有不可约常特征标级均与p互素，则G有交换正规的Sylow$p$—子群〔1〕．本文首先说明在上定理中，可以将G的可解群这一假设减弱为p—可解，然后讨论了在特征$=p$的代数闭域上Itô定理仍然成立．

定理1 若p—可解群G有级$<p-1$的忠实特征标χ，则G有交换正规的Sylow p—子群．

证明 显然定理的条件被商群及子群继承，令G是极小反例，$P\in Syl_pG$，则

1．P交换．

2．令H是G的极大正规子群，则$p|[G:H]$．

若$p\nmid[G:H]$．则$p\le H$．由归纳法，$P\lhd H$．从而$P\lhd G$．所以$p|[G:H]$，$[G:H]=p$．

3．$P\cap H\le Z(G)$．

由$H<G$，得$O_p(H)\in Syl_pH$，$O_p(H)\lhd G$．由P交换有$P\le C_G(O_p(H))\lhd G$．又G是极小反例，只有$C_G(O_p(H))=G$，即$O_p(H)\le Z(G)$．所以$H\cap P\le Z(G)$

4．$G'<G$．

由2．$G=PH$．$G/H\simeq P/P\cap H$交换，所以$G'\le H<G$．

5．$P\cap G'=1$．

令T是与χ对应的表示，仿3．的证明$P\cap G'\le Z(G)$．设$g\in P\cap G'$．由于$g\in \mathbf{Z}(G)$，$T(g)=aI$为纯量．又$g\in G'$．g为换位子之积．所以$a^{\chi(1)}=\det T(g)=1$．又$a^{p^n}=1$．而$\chi(1)<p-1$．所以$a=1$．T是忠实表示，$g=1$．即$P\cap G'=1$．

6．矛盾．

因为$PG'\lhd G$．由G是G极小反例，$PG'=G$，$P\cap G'=1$．因为$N_G(P)<G$，所以存在素数q，使$q|[G:N_G(P)]$．令Q是G'的Sylow$q$—子群，由$P\cap G'=1$，Q也是G的Sylow$q$—子群，由Frattini 推理，$G==N_G(Q)G'$．所以$N_G(Q)$包含G的某个Sylow$p$—子群P_0．现考虑可解子群P_0Q．若$P_0Q=G$，则由可解情形的Itô定理得$P_0\lhd G$；若$P_0Q<G$．由G是极小反例得，$P_0\lhd P_0Q$．不论哪种情形，总有$Q\le N_G(P_0)$，所以$q\nmid[G:N_G(P)]$．这与q的选取矛盾．

综上可知，极小反例不存在，证毕．

定理2 若p—可解群G的所有不可约常特征标级与p—互素．则G的Sylow p—子群

*1985年9月19日收到．

交换且正规.

证明 仿定理1的证明.

下面讨论特征 $=p$ 的代数闭域R上不可约Frobenins特征标级与正规Sylow p—子群的关系.

定理3 若 p—可解群G有忠实特征标 ξ，使 $\xi(1)<p-1$. 则G有交换正规的Sylow p—子群. 从而G为 p'—群.

证明 由Fang—Swan提升定理，归结为常特征标的情形.

定理4 若 p—可解群G在R上的所有不可约特征标级与 p—互素，则G有正规的Sylow p—子群.

下面的引理在定理4的证明中起重要作用.

引理 设 $N\leq G$，θ 是N的不可约特征标，$\theta^G=\sum_{i=1}^{\xi}b_i\chi_i$，$\chi_i$ 为G的不可约特征标，则对于 $b_i\neq 0$，χ_i 对应的主不可分特征标 ξ_i 中，有 $\chi\subseteq\xi_i$，使 $\chi|_N=e_i\theta+\psi$，$e_i\geq b_i$，θ 与 ψ 不交，特别当 $N\triangle G$.

$$\chi|_N=e_i(\sum_j\theta^{g_j})，\text{其中}e_i\geq b_i.$$

证明 令 $\theta_1,\cdots,\theta_t$ 是N的所有不可约特征标，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 为对应的主不可分特征标. $\chi_1,\cdots,\chi_s$ 是G的不可约特征标，$\xi_1,\cdots,\xi_s$ 为对应的主不可分特征标. 不妨设 $\theta=\theta_1$，

$\theta_1^G=b_{11}\chi_1+b_{21}\chi_2+\cdots+b_{51}\chi_5$，设 $b_{i1}\neq 0$. 由Nakayama关系，有

$$\xi_i|_N=b_{i1}\eta_1+\cdots+b_{it}\eta_t=(b_{i1},\cdots,b_{it})\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_t\end{pmatrix}=(b_{i1},\cdots,b_{it})\begin{pmatrix}r_{11}\cdots r_{1t}\\ \cdots\\ r_{t1}\cdots r_{tt}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \vdots\\ \theta_t\end{pmatrix}$$

$$=(\sum_{j=1}^{t}b_{ij}r_{j1})\theta_1+\cdots+(\sum_{j=1}^{t}b_{ij}r_{jt})\theta_t.$$

这里 (r_{ij}) 是N的Cartan矩阵，在 (r_{ij}) 中，显然有 $r_{11},\cdots,r_{tt}\geq 1$. 所以 $\sum_{j=1}^{t}b_{ij}r_{j1}\geq b_{i1}$，令 $e_i=\sum_{j=1}^{t}b_{ij}r_{j1}$，则 $\exists\chi\leq\xi_i$，使 $\chi|_N=e_i\theta_1+\psi$，θ_1 与 ψ 不交.

当 $N\triangleleft G$ 时，因为Cllifford定理对任意域成立，所以 $\chi|_N=e_i(\Sigma\theta^{g_j})$.

定理4的证明 显然，G的条件被高群继承，由引理可知G的条件被正规子群继承. 令G是极小反例，H是G的极大正规子群. 则

1. $p|[G:H]$.

否则 $p\nmid[G:H]$，则由归纳法 $P\triangleleft H$，所以 $P\triangleleft G$，此与G是极小反例相连，从而 $p|[G:H]$，$[G:H]=p$.

2. $P\cap H=1$，$G=PH$.

令 $P_0=P\cap H$，若 $P_0>1$，则由 $P_0\in Syl_pH$，得 $P_0\triangleleft H$，从而 $P_0\triangleleft G$. 对 G/P 用归纳法，有 $P\triangleleft G$.

3. H的每个特征标都是G－不变的.

θ 是H的不可约特征标，则 $T(\theta)=H$，若 $T(\theta)=H$. 则 θ^G 是不可约的，从而 $\theta^G(1)=p\theta(1)$ 与题设矛盾. 故 $T(\theta)=G$，即 θ 是G－不变的.

4. 矛盾.

因为H为 p'－群，H的不可约特征标与常特征标等价. 令P共轭作用在H上，P同时作

用在$I_{\pi}(H)$上，此时，Brauer特征标表定理成立．由3，P使H的每个共轭类不动．

令P_1，…，P_t是G的Sylow p－子群的共轭类，$\forall h \in H$，P作用$\{h^G\}=\{h^H\}$上．因为$(|P|, |H|)=1$，所以P在$\{h^H\}$上有不动点，令$h^{h_1} \in C_G(P)$，则$h \in \bigcup_{i=1}^{t} C_G(P_i)$．所以$G \leq \bigcup_{i=1}^{t} C_G(P_i) = \bigcup_{i=1}^{t} C_G(P)^{x_i}$．只有$C_G(P)=G$，$P \Delta G$．

综上可知，极小反例不存在，定理成立．

参 考 文 献

〔1〕I.M.Isaacs, Character Theory of Finite Groups, Academic Press. New York. 1976.

〔2〕W. Feit, Representations of Finite Groups, New York, 1982.