1987年2月

数学研究与评论
第七卷 第一期

关于次加泛函的一点注记*

李 冲

（杭州商学院）

定光桂先生〔1〕提出并解决了下述问题：

$L^{\beta}[a,b]$（$0<\beta<1$）上是否存在不恒为0的连续β'级绝对齐性的次加泛函（$\beta<\beta'<1$）？

自然地，我们会提出如下问题：设（Ω,μ）是任一有限测度空间，则对$L^{\beta}(\Omega,\mu)$（$0<\beta<1$）情形．其结果如何呢？或者，更一般地，如果（E，$\|\cdot\|_{\beta}$）是一有β级绝对齐性的距离线性空间，则是否存在E上的不恒为0的β'级绝对齐性的连续次加泛函呢？本文的目的是解决上述问题，从而得到了文〔1〕§1中定理的一种简单的证明．

下面我们均设$0<\beta\leq\beta'\leq 1$．显然，下面两个引理的证明是容易的：

引理1 设$P(x)$是（E，$\|\cdot\|_{\beta}$）上的β'级绝对齐性的次加泛函，则P连续$\Leftrightarrow P$在E的单位球上有界，即：

$$\|P\|=\sup_{\|x\|_{\beta}\leq 1}P(x)<+\infty$$

引理2 令$|x|_{\beta'}=\inf\{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_{\beta}^{\beta'/\beta}:\ x=\sum_{i=1}^{n}x_i,\ x_i\in E.\ n<+\infty\}$．则（E，$|\cdot|_{\beta'}$）是$\beta'$级绝对齐性的距离线性空间，且

i） $|x|_{\beta'}\leq\|x\|_{\beta}^{\beta'/\beta}$，$\forall x\in E$；

ii）对E上的次加泛函$g(x)$，若$g(x)\leq\|x\|_{\beta}^{\beta'/\beta}$则$g(x)\leq|x|_{\beta'}$．

定理 设$0<\beta\leq\beta'\leq 1$，则在（E，$\|\cdot\|_{\beta}$）上存在不恒为0的β'绝对齐性的连续次加泛函$\Leftrightarrow$存在$x\in E$使$|x|_{\beta'}\neq 0$．

证 显然，在（E，$|\cdot|_{\beta'}$）上存在不恒为0的β'级绝对齐性的连续次加泛函$\Leftrightarrow$存在$x\in E$，使$|x|_{\beta'}\neq 0$．这样，我们只要证明：对E上的β'绝对齐性的次加泛函$P(x)$在（E，$|\cdot|_{\beta'}$）上连续$\Leftrightarrow P(x)$在（E，$\|\cdot\|_{\beta}$）上连续即可．为此，令$|P|=\sup_{|x|_{\beta'}\leq 1}P(x)$，则由引理2 i）得：对$x\in E$，若$\|x\|_{\beta}\leq 1$，则$|x|_{\beta'}\leq 1$故有$\|P\|\leq|P|$．

另一方面，由于$P(x)\leq\|P\|\,\|x\|_{\beta}^{\beta'/\beta}$，从而由引理2 ii）得$P(x)\leq\|P\|\,|x|_{\beta'}$，$\forall x\in E$，所以$|P|\leq\|P\|$．因此，$\|P\|=|P|$．由引理1，定理得证．

推论 设（Ω,μ）是有限测度空间：$0<\beta<\beta'\leq 1$，则$L^{\beta}(\Omega,\mu)$上存在不恒为0的β'级绝对齐性的连续次加泛函$\Leftrightarrow$（Ω,μ）至少有一个原子．

证 "$\Rightarrow$"，反设（Ω,μ）没有原子．对$x\in L^{\beta}(\Omega,\mu)$是任何一个简单函数$x=\sum_{i=1}^{m}x_i\chi_{F_i}$：因（$\Omega,\mu$）没有原子，则存在$\{F_1,\cdots,F_m\}$的一族加细$\{A_1,\cdots,A_n\}$，满足$\mu(A_i)>0$

*1985年1月2日收到．

$(i=1,2,\cdots,n)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\leq j\leq n}\mu(A_j)=0$，且$x=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\chi_{A_i}$，$|c_i|^{\beta'}\leq M=\max\limits_{1\leq i\leq m}|x_i|^{\beta'}$，$(i=1,2,\cdots,n)$.

这样，

$$|x|_{\beta'}\leq\sum_{i=1}^{n}\|c_i\chi_{A_i}\|_{\beta}^{\beta'/\beta}=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_\Omega|c_i\chi_{A_i}|^{\beta}\mathrm{d}\mu\right]^{\beta'/\beta}=\sum_{i=1}^{n}|c_i|^{\beta'}\mu(A_i)^{\beta'/\beta}$$

$$\leq M\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)^{\beta'/\beta}=M\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\text{、}\mu(A_i)^{(\beta'/\beta)-1}\leq M\cdot\mu(\Omega)\cdot\max_{1\leq i\leq n}\mu(A_i)^{(\beta'/\beta)-1}$$

由于$\frac{\beta'}{\beta}-1>0$，故$\lim\limits_{n}M\mu(\Omega)\max\mu(A_i)^{(\beta'/\beta)-1}=0$. 所以$|x|_{\beta'}=0$. 由定理得必要性成立。

"$\Leftarrow$". 设$A_0\subset\Omega$是(Ω,μ)的一个原子，$x(t)$是A_0的特征函数，则$|x|_{\beta}'=\|x\|_{\beta}^{\beta'/\beta}\neq 0$. 由定理得充分性成立. 证毕

注　当$\beta'=\beta$时，$L^{\beta}(\Omega,\mu)$上总存在β级绝对齐性的连续的次加泛函.

参 考 文 献

[1] 定光桂、关于次加泛函的两点注记，数学年刊，5 A(1984)，253—256.

A Note on Subadditive Functionals

Li Chong

(HangZhon Institute of Commerce)

Abstract

In this note we obtained a both sufficient and necessary condition there exist non-zero β' degree abslutely homogeneous, continuous and subadditive functionals in metric linear spaces $(E,\|\cdot\|_{\beta})$ for $0<\beta\leq\beta'\leq1$. Applying our result, a simpler proof of theorem in [1, §1] was given.