某类系数具有弧立奇点的二阶线性复方程的一般解和广义R—H问题*

曾　岳　生

（湖南省怀化师范专科学校）

在边界$\Gamma=\partial G\in C^{2,\lambda}$，$0<\lambda<1$的平面有界区域$G(0\in G)$内，考察下列二阶线性复方程

$$W_{\bar z\bar z}+\left[\frac{a(z)\overline{\beta(z)}}{\bar z}+\overline{\gamma(z)}\right]W_{\bar z}=f(z), \tag{1}$$

这里$W_{\bar z}=\dfrac{\partial W}{\partial\bar z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial W}{\partial x}+i\dfrac{\partial W}{\partial y}\right)$，$z=x+iy$，$a(z)$，$\beta(z)$，$\gamma(z)$都是G内的解析函数，$a(z)$，$\beta(z)$、$\gamma(z)\in C^{1,\lambda}(\bar G)$，且$a(0)\neq 0$，$\beta(0)\neq 0$，$f(z)\in C^{0,\lambda}(\bar G)$，$0<\lambda<1$。

我们建立了方程（1）的适合下述条件的一般解$W(z)$：

$$W(z)\in C^{2,\lambda}(\bar G/0),\quad 0<\lambda<1;\ \overline{\lim_{z\to 0}}|W(z)|<\infty. \tag{2}$$

令$A(z,\bar z)=a(z)\overline{\beta(z)}+\bar z\overline{\gamma(z)}$，作辅助函数

$$\omega(z)=\frac{A(z,0)}{\pi}\iint_G\frac{A(\zeta,\bar\zeta)-A(\zeta,0)}{\bar\zeta A(\zeta,0)(\zeta-z)}d\xi d\eta,\ \zeta=\xi+i\eta, \tag{3}$$

取整数k，使满足

$$-1<k-2\,\mathrm{Re}A(0,0)\leq 0; \tag{4}$$

引进记号

$$\rho(z)=z^k|z|^{-2A(z,0)}e^{\omega(z)},$$

$$T(F(\zeta)|z)=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta,$$

而$\varphi(z)z^{-k}$仍记为$\varphi(z)$，则齐次方程（$f(z)\equiv 0$）的满足条件（2）的一般解有两种情况：

当$-1<k-2\,\mathrm{Re}A(0,0)<0$时，有

$$W(z)=T(\varphi(\zeta)\rho(\zeta)|z)+\psi(z), \tag{5}$$

其中$\varphi(z),\psi(z)$是G内任意解析函数，$\varphi(z)\in C^{1,\lambda}(\bar G)$，$\psi(z)\in C^{2,\lambda}(\bar G)$，$0<\lambda<1$。

当$k=2\,\mathrm{Re}A(0,0)$时，有

$$W(z)=z^{-1}T(\varphi(\zeta)\rho(\zeta)|z)+\psi_2(z), \tag{6}$$

其中$\varphi(z)$是G内任意解析函数，$\varphi(z)\in C^{1,\lambda}(\bar G)$，$\psi_2(z)$是$G\setminus 0$内任意解析函数，$\psi_2(z)$ $C^{2,\lambda}(\bar G\setminus 0)$，$0<\lambda<1$，且有主部$-z^{-1}T(\varphi(\zeta)\rho(\zeta)|0)$。

非齐次方程（1）的一个特解为

*1985年7月12日收到.

$$W_0(z)=T(\rho(\zeta)T(f(\tau)\rho(\tau)^{-1}|\zeta|)|z). \tag{7}$$

于是，方程（1）的满足条件（2）的一般解可以表示为

$$W(z)=W^*(z)+W_0(z), \tag{8}$$

其中$W^*(z)$为齐次方程的一般解（5）$(-1<k-2\mathrm{Re}A(0,0)<0)$或（6）$(k=2\mathrm{Re}A(0,0))$，$W_0(z)$是特解（7）。

我们研究了方程（1）的具有下列边界条件的广义Riemann-Hilbert边值问题：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}[\overline{\lambda_1(t)}W_{\bar{t}}]=g(t), && \qquad (9)\\ &\mathrm{Re}[\overline{\lambda_2(t)}W_t]=h(t), && \qquad (10)\end{aligned} \quad t\in\Gamma,$$

其中$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$g(t)$，$h(t)\in C^{0,\lambda}(\Gamma)$，$0<\lambda<1$，且$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$在$\Gamma$上处处不等零。

根据Riemann映照定理，存在解析函数$\omega(\zeta)$，$\omega'(\zeta)\neq0$，且$\omega(0)=0$，$\omega'(0)>0$，使$z=\omega(\zeta)$为实现单连通区域G到单位圆$\{\zeta:|\zeta|<1\}$的共形映照．在此共形映照之下(仍以$z\in\{|z|<\}$表示自变数)，方程（1）的形式不变，且边界条件（9）、(10)的形式也不变．因此，研究方程（1）的广义R—H问题时，不妨假定区域G为单位圆$|z|<1$，边界$\Gamma:|z|=1$．

将方程（1）的一般解（8）先后代入边界条件（9）和（10），就把广义R—H问题（1）、(9)、(10)归结为求解单位圆上的解析函数$\varphi(z)$的Riemann—Hilbert问题和解析函数$\psi(z)$的Poincaré问题，从而得到广义R—H问题（1）、(9)、(10)的可解性结论，即问题可解的充分必要条件及线性无关解的个数与问题的指标之间的关系，并且得出了解的表示式．

参 考 文 献

〔1〕Шаринова Р.М., Диффе.Урав., Т.12. No.2(1976). 343—347.

〔2〕Рахнатуллаев А.Х., ДАН УЗССР, №11. 1983.

〔3〕Векуа И.Н., 广义解析函数（上册），人民教育出版社，1960.

〔4〕Гахов Ф.Д., Краевые задачи, 2—ое изд.（1963），Москва.

〔5〕Мусхелишвили Н.И., 奇异积分方程，上海科技出版社，1966.