以抛物线为特殊积分曲线的二次系统的极限环（续）

陈叔平

（浙江大学）

在文[1]中作者已经证明了以抛物线为特殊积分曲线的平面二次系统E_2若存在极限环，则必可经仿射变换化为以下两种形式之一：

$$\dot{x}=xy+\mu,\quad \dot{y}=(xy+\mu)(x+l)+(2y-1)(y-\frac{1}{2}x^2-lx-m)\quad (\mu>0), \tag{1}$$

$$\dot{x}=xy+\mu,\quad \dot{y}=(xy+\mu)(x+l)+(2y+1)(y-\frac{1}{2}x^2-lx-m)\quad (\mu>0). \tag{1'}$$

它们都以抛物线

$$G(x,\ y)\equiv y-\frac{1}{2}x^2-lx-m=0 \tag{2}$$

为积分曲线．此外，它们的奇点除一个外都在抛物线（2）上，这些奇点由以下方程组确定：

$$xy+\mu=0,\quad y-\frac{1}{2}x^2-lx-m=0. \tag{3}$$

文[1]已经得到系统（1）存在极限环的充要条件和极限环的相时位置．本文讨论系统（1′）极限环的存在条件．所有记号、术语均沿用文[1]的。

引理1 系统（1′）的极限环只可能出现在奇点$M_1(2\mu,\ -\frac{1}{2})$的外围．并且在M_1外围存在极限环的必要条件是：

$$(\text{i})\ \mu(l+2\mu)>0;\quad (\text{ii})\ \frac{1}{2}+2\mu^2+2l\mu+m>0.$$

证 （1′）的奇点除$M_1(2\mu,\ -\frac{1}{2})$外均在抛物线（2）上，故结论的前一部分显然成立．为证明结论的第二部分，先计算出（1′）在奇点M_1的导算子为

$$D(M_1)\triangleq\begin{pmatrix}\frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial y}\\ \frac{\partial Q_2}{\partial x} & \frac{\partial Q_2}{\partial y}\end{pmatrix}_{M_1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 2\mu\\ -\mu-\frac{l}{2} & -2l\mu-2m-1\end{pmatrix}. \tag{4}$$

对二次系统而言，奇点M_1外围存在极限环时，此奇点必须是该系统的焦点，因此应该有

$$\left(\frac{\partial P_2}{\partial x}+\frac{\partial Q_2}{\partial y}\right)^2-4\left(\frac{\partial P_2}{\partial x}\frac{\partial Q_2}{\partial y}-\frac{\partial P_2}{\partial y}\frac{\partial Q_2}{\partial x}\right)<0,\ \text{即}\ \left(\frac{\partial P_2}{\partial x}-\frac{\partial Q_2}{\partial y}\right)^2+4\frac{\partial P_2}{\partial y}\frac{\partial Q_2}{\partial x}<0.$$

将（4）分别代入这两个式子，就得到条件（i）与（ii）． ∎

现在证明本文的主要结论：

* 1983年 9 月23日收到．

定理 1 若系统（1′）存在极限环，则以下条件必定满足：

$$(*)\begin{cases} M_1(2\mu,\ -\frac{1}{2}) \text{ 是（1′）在抛物线（2）外部的焦点，} & (5) \\ l(2l\mu+2m+\frac{3}{2})<0\ . & (6) \end{cases}$$

反之，若满足条件（$*$）且 $|2l\mu+2m+\frac{3}{2}|\ll 1$，则（1′）在奇点$M_1$外围确存在极限环．

证 把M_1的坐标代入抛物线方程（2），那么由引理1的条件（ii）即知M_1应是（1′）在抛物线（2）外部的焦点，即（5）是必要的．为证（$*$）中的（6）式，作函数$B(x, y)=x^{-2k-5}(y-\frac{1}{2}x^2-lx-m)^k$，则对系统（1′）有：

$$\frac{\partial(BP_2)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ_2)}{\partial y}=x^{-2k-6}(y-\frac{1}{2}x^2-lx-m)^k\cdot\varphi(x),$$

$\varphi(x)=-lx^2-(k-2m+1)x-(2k+5)$ 是x的二次多项式，其判别式$\Delta(k)=(k+1-2m)^2-4l\mu(2k+5)$ 于$k_0=4l\mu+2m-1$ 处取到最小值$\Delta(k_0)=-8l\mu(2l\mu+2m+\frac{3}{2})$．由于$\mu>0$，故若$l(2l\mu+2m+\frac{3}{2})\geqslant 0$，那么取$k=k_0$就可使$\varphi(x)$保持常号或恒等于零．但$x=0$是无切直线，而$y-\frac{1}{2}x^2-lx-m=0$是轨线，所以根据Dulac判据即知（1′）这时不存在极限环．这说明了（6）式的必要性．定理第一部分于是证毕．

由证明过程可以看出，只要$l\neq 0$，那么当$l(2l\mu+2m+\frac{3}{2})\geqslant 0$时，(1′)不仅不存在极限环，亦不以$M_1$作为其中心．利用这一点，我们来证明定理的第二部分即充分条件．

设（1′）的参数满足（$*$）以及$|2l\mu+2m+\frac{3}{2}|\ll 1$．引入辅助参数$\lambda=l\mu+m+\frac{3}{4}$，将（1′）改写成

$$(1')_\lambda\quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xy+\mu \\ (xy+\mu)(x+l)+(2y+1)(y-\frac{1}{2}x^2-lx+l\mu+\frac{3}{4}-\lambda) \end{pmatrix}\triangleq f(x, y, \lambda)$$

对所有的λ，$(1')_\lambda$都以$M_1(2\mu,\ -\frac{1}{2})$为奇点．由$l(2l\mu+2m+\frac{3}{2})<0$可知$l\neq 0$．而（$*$）要求$M_1$在抛物线（2）的外部，故有

$$0<2\mu^2+2l\mu+m+\frac{1}{2}=\left(2\mu^2+l\mu-\frac{1}{4}\right)+\left(l\mu+m+\frac{3}{4}\right)$$

此式对$|l\mu+m+\frac{3}{4}|$充分小时都成立，故应有$2\mu^2+l\mu-\frac{1}{4}>0$．再看$f(x, y, \lambda)$在$M_1$处的导算子为

$$A(\lambda)=A(0)+\lambda B(\lambda),\ \text{其中}A(0)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2\mu \\ -\mu-\frac{1}{2}l & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\quad B(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

显见$\mathrm{tr}\,A(0)=0$，$\det A(0)=2\mu^2+l\mu-\frac{1}{4}>0$，$\mathrm{tr}\,B(0)=-2\neq 0$,且因为$l\neq 0$，故$\lambda=0$时$M_1(2\mu,\ -\frac{1}{2})$不是$(1')_0$的中心，从而应用Hopf分支定理[2]和本定理的必要条件即知：对绝对值充分小的λ（满足$l\lambda<0$），$(1')_\lambda$在M_1附近存在唯一极限环．并且当$\lambda\to 0$时极限环收缩为奇点M_1，它的周期则趋于$\frac{2\pi}{\omega}$，这里ω是$A(0)$的特征根的模． ∎

系 当$l=0$，$m=-\frac{3}{4}$时，M_1为系统（1′）的中心．

证 当$l=0$，$m=-\frac{3}{4}$时，M_1是系统（1′）的中心型奇点，而由定理1第一部分的证明看到

$B(x,\ y)=\left(y-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)^{-5/2}$ 是（1′）的积分因子，故这时M_1确是（1′）的中心. ∎

最后指出，定理 1 得到的并非充要条件．而文[1]则对于系统(1)得到了存在极限环时参数所应满足的充要条件——即求出了参数空间的分支曲面．因此对（1′）得到类似的结果显得是很有兴趣的.

本文自始至终得到蔡燧林老师的热忱指导．文[1]与本文的主要结果已由叶彦谦教授于1983年 9 月 7 日在DD_4会议上作题为“Recent Contributions of Chinese Mathematicians on Quadratic Differcntial Equations Since 1980”的报告中概要介绍，在此一并致谢.

参 考 文 献

〔1〕陈叔平，以抛物线为特殊积分曲线的二次系统的极限环，科学通报，Vol.30，No.6，pp.401—405(1985).
〔2〕张锦炎，常微分方程的几何理论与分支问题，北京大学出版社（1981），pp.192—193.