1987年2月

数学研究与评论
第七卷　第一期

系统 $\dot{x}=\dot{y}$，$y=(1-x^2)x+(a-x^2)y$（$2<a<2.5$）恰存在一个极限环包含三个奇点*

索光俭　　沈伯骞
（吉林师院）　（辽宁师大）

文〔1〕指出系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y &&=P(x,\ y)\\ \dot{y}&=(1-x^2)x+(a-x^2)y&&=Q(x,\ y)\end{aligned}\qquad(1)$$

当$a=2.5$时至少存在一个包含三个奇点的极限环，本文将证明当$2<a<2.5$时（1）恰好存在一个极限环，它包含三奇点$A_1(-1,\ 0)$，$O(0,\ 0)$及$A_2(1,\ 0)$.

定理1　若$a>2$，则（1）至多存在一个极限环，它包含三个奇点A_1，O，A_2.

证　令$F=x^4+2y^2-2x^2-(a^2-2a)=0$，因$a>2$，$F=0$为包含三奇点$A_1$，O，$A_2$，界于两直线$x=\pm\sqrt{a}$间且过点（$\pm\sqrt{a}$，0）的单闭曲线．在$F=0$上沿（1）的轨线

$$\frac{dF}{dt}=4(a-x^2)y^2$$

常号，因此（1）的极限环不能穿越曲线$F=0$.

在环域$F>0$中，取Dulac函数$B=F^{-\frac{1}{2}}$，显然在环域$F>0$上，$B>0$连续可微且

$$\mathrm{div}(BP,\ BQ)=-F^{-\frac{3}{2}}(a-x^2)^2(x^2+a-2)$$

定号，根据Dulac-Bendixson判据（见〔2〕），知在环域$F>0$上（1）至多存在一个极限环，且此环包含三个奇点A_1，O，A_2.

在单连通域$F<0$中，取Dulac函数$B=(-F)^{-\frac{1}{2}}$. 显然在单连通域$F<0$中，$\overline{B}<0$连续可微且

$$\mathrm{div}(BP,\ BQ)=(-F)^{-\frac{3}{2}}(a-x^2)^2(x^2+a-2)$$

定号，因此（1）在单连通域$F<0$上无极限环，证毕.

定理2　若$2<a<2.5$，则（1）恰好存在一个极限环，它包含三个奇点A_1，O，A_2.

证　由文〔1〕已知$a=2.5$时至少存在一个包含三奇点的极限环，又易知（1）关于a在全平面上构成旋转向量场．由定理1知（1）当$2<a<2.5$时恰好存在一个极限环，它包含三个奇点A_1，O，A_2．证毕.

参考文献

〔1〕李继彬．平面三次系统的一类极限环分布，中国科学，1984.7，586.
〔2〕张芷芬，微分方程定性理论，科学出版社，1985，275.

* 1986年10月4日收到.