近年来关于三角级数L^1收敛的一些结果*

盛淑云
（杭州大学）

设三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx-b_k\sin kx\sim F(x) \qquad (1)$$

的部分和为$S_n(F,x)$，假如$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(F,x)-F(x)|dx=0$，则称级数（1）为$L^1$收敛，记作$\|S_n(F,x)-F(x)\|_{L^1}=o(1)$（$n\to\infty$），或简记为$\|S_n(x)-F(x)\|=o(1)$.

又设

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_n\cos kx\sim f(x), \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^r a_k\cos(kx+\frac{r}{2}\pi)\sim f_r(x)\quad (r=1,2,\cdots) \qquad (3)$$

假如$f(x)$有r阶导数$f^{(r)}(x)$，且$f^{(r)}(x)\in L$，则$f_r(x)=f^{(r)}(x)$．分别记级数（2）．（3）的部分和为$S_n(f,x)=S_n(x)$，$S_n(f_r,x)=S_n^{(r)}(f,x)=S_n^{(r)}(x)$．称$\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_n(x)$为$S_n(x)$的算术平均。

假如存在$a>0$，使$n^{-a}q_n\downarrow 0$，则说数列$\{q_n\}$为拟单调数列．

本文将简要地介绍一下从一九七三年至一九八三年来关于三角级数L^1收敛的一些结果．

§1　关于余弦级数的L^1收敛

1.1　首先讨论级数（2）L^1收敛于$f(x)$与$a_n\lg n=o(1)$等价的条件．早在1913年Young[17]就指出：若级数（2）中的系数序列为凸的（即$\Delta^2a_n\geqslant 0$）富里埃系数，则

$$\|S_n(x)-f(x)\|=o(1)\Longleftrightarrow a_n\lg n=o(1) \qquad (4)$$

十年以后，Kolmogoroff[16]将$\{a_n\}$是凸的富里埃系数这一条件减轻为$\{a_n\}$是拟凸的（即$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)|\Delta^2a_n|<\infty$）富里埃系数．此后一段较长的时间，在这方面的结果很少看到，半个世纪以后才陆续出现一些工作，特别是最近几年进展较快．

1973年Telykovskii[1]将拟凸的富里埃系数这一条件减轻为$\{a_n\}\in S$，$S=\{a_n:a_n=o(1),\exists A_n\downarrow 0,\sum A_n<\infty$且$\forall n,|\Delta a_n|\leqslant A_n\}$．他证明：当$\{a_n\}\in S$时，$f\in L$，且（4）成立．接着Singh和Sharma[2]将$\{a_n\}\in S$这一条件放宽到$\{a_n\}\in S^1$，$S^1=\{a_n:a_n=o(1)$

* 1984年6月27日收到．

$\exists A_n$拟单调，$\Sigma A_n<\infty$，且 $\forall_n$，$|\Delta a_n|\leqslant A_n\}$．结果同样成立．同一时候 Фомин[5] 发现：如果 $\{a_n\}\in\mathscr{F}_p(1<p\leqslant 2)$ $\mathscr{F}_p=\{a_n: a_n=o(1),\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=n}^{\infty}|\Delta a_k|^p\Big]^{\frac{1}{p}}<\infty\}$，则 $f\in L$．且（4）成立．Garrett 与 Stanojevic[6] 亦指出，假如 $\{a_n\}\in BV\cap C$（其中 $BV=\{a_n: a_n=o(1),\ \Sigma|\Delta a_n|<\infty\}$，$C=\{a_n: a_n=o(1)\ \ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ 使 $\int_0^{\delta}|\sum\limits_{k=n}^{\infty}\Delta a_k D_k(x)|dx<\varepsilon\}$）则亦可获得同样结果，现在我们要问这些类 S, S^1, $\mathscr{F}_p$（$1<p\leqslant 2$）以及 $BV\cap C$ 之间有什么关系？显然 $S\subset S^1$．从〔5〕可以明白 $S\subset\mathscr{F}_p(1<p\leqslant 2)$，从〔7〕〔10〕又可见到 $\mathscr{F}_p(1<p\leqslant 2)\subset BV\cap C$，于是又自然会问：$S^1$ 与 $\mathscr{F}_p(1<p\leqslant 2)$ 有何关系？我们证得[22] $S^1\subset\mathscr{F}_p(1<p\leqslant 2)$．

另一方面，如果继续限制 $\{a_n\}$ 为富里埃系数，那么要使 $S_n(x)$ L^1 收敛于 $f(x)$ 与 $a_n\lg n=o(1)$ 等价．还须加什么比拟凸更轻的条件？1981年 Stanojevic[7] 指出 $\{a_n\}$ 还须属于 $C_p^*\cap BV$，这里 $C_p^*=\{a_n: a_n=o(1),\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{p-1}|\Delta a_n|^p<\infty\}$，同时他又指出还可将 C_p^* 放宽到 C_p, $C_p=\{a_n: a_n=o(1),\ n\Big[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|\Delta a_k|^p\Big]^{\frac{1}{p}}=o(1)\}$．接着 Bojanic 和 Stanojevic[8] 两人又指出条件 $C_p\cap BV$ 还可放宽到 $\{a_n\}\in V_p(1<p\leqslant 2)$，$V_p=\{a_n: a_n=o(1),\ \frac{1}{n}\sum\limits_{k=n}^{2n-1}k^p|\Delta a_k|^p=o(1)\}$．所有这些结果都是 Young 的定理的改进．

1.2 设 $a>0$，记 $S_a=\{a_n: n^a a_n=o(1),\ |\Delta a_n|\leqslant A_n\ \exists A_n$拟单调且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^a A_n<\infty\}$．我们证明[21]若 $\{a_n\}\in S_a$ 则

$$\|S_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\|=o(n^{r-a})\Longleftrightarrow a_n\lg n=o(n^{-a})\qquad(5)$$

当 $a=r$ 时，记 $S_a=S_r^1$；又当 $a=r=0$ 时，记 $S_0^1=S^1$．此时（5）式即为（4），所以上述 Singh 与 Sharma[1]的结果为其特殊情形．

在 $\{a_n\}$ 为拟单调的假设下条件 $n^r a_n\lg n=o(1)$ 及 $f^{(r)}(x)\in L$ 含有级数（2）的 r 阶导级数 L^1 收敛于 $f^{(r)}(x)$[20]．我们还证明[22]：若 $\{a_n\}\in V_p^{(r)}(1<p\leqslant 2)$ 且 $f^{(r)}\in L$ 则级数（2）的 r 阶导级数 L^1 收敛于 $f^{(r)}(x)$ 的充要条件是 $n^r a_n\lg n=o(1)$．记 $V_p^{(0)}=V_p$，置 $r=0$，即可知道§1.1 中〔8〕的结果是其特殊情形．

1.3 当级数（2）的系数 $\{a_n\}$ 为有界变差序列时 Garrett 和 Stanojevic[13] 指出：如果 $\{a_n\}$ 还满足条件 $a_n\lg n=o(1)$ 时，级数（2）L^1 收敛于 $f(x)$ 的充要条件是 $\{a_n\}\in C$．接着 Garrett 和 Ress[12] 又发现条件 $\{a_n\}\in BV$ 还可以放宽到 $\{a_n\}\in BV^{(m)}$，上述结果同样成立，这里 $BV^{(m)}=\{a_n: a_n=o(1),\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}|\Delta^m a_k|<\infty\}$．$\Delta^m a_n=\Delta(\Delta^{m-1}a_n)$，$\Delta^1 a_n=\Delta a_n$．我们推广了这些结果，得到[23]：若 $\{a_n\}\in BV_{(r)}$，$BV_{(r)}=\{a_n: n^r a_n=o(1),\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}k^r|\Delta a_k|<\infty\}$．且 $n^r a_n\lg n=o(1)$（$r=0,1,2\cdots$）则 $\|S_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\|=o(1)\Longleftrightarrow\{a_n\}\in C^{(r)}$，$C^{(r)}=\{a_n: n^r a_n=o(1),\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ 使得 $\int_0^{\delta}\Big|\sum\limits_{k=n}^{\infty}k^r\Delta a_n D_k^{(r)}(x)\Big|dx<\varepsilon\}$．又若 $\{a_n\}\in BV_r^{(m)}$，$BV_r^{(m)}=\{a_n: n^r a_n=o(1),\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}k^r|\Delta^m a_n|<\infty\}$ 且 $n^r a_n\lg n=o(1)$（$r=0,1$），则 $\|S_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\|=o(1)\Longleftrightarrow a_n\in C^{(r)}$．

1.4 设 $b_n(f)=2\int_0^\pi \sin\frac{x}{2}|f(x)-S_n(x)|^2dx$，1977年 Фомин[14] 证得：假如 $b_n(f)\lg n= o(1)$ 则级数（2）L^1 收敛于 $f(x)$．假如级数（2）的系数为有界变差序列，则

$$\|S_n(x)-f(x)\|\geqslant b_n(f)/\sum_{k=n+1}^{\infty}|\Delta a_k| \quad (n=1,2,\cdots)$$

对于共轭级数情形 Singh 和 Sharma[2] 指出：若 $\{a_n\}\in S^1$，则级数（2）的共轭级数 L^1 收敛于 $\widetilde{f}(x)$ 的充要条件是 $a_n\lg n=o(1)$ 且 $\Sigma|a_n|/n<\infty$．

§ 2．一般三角级数及函数序列的 L^1 收敛

2.1 1976年 Garrett 和 Stanojević 证明[13]：若级数（1）的系数满足 $\Delta a_n\geqslant 0$，$\Delta b_n\geqslant 0$ 且 $a_n\lg n=o(1)$，$b_n\lg n=o(1)$，则序列 $\{n S_n(x)\}$ L^1 收敛．由此可推得：在同样条件下级数（1）L^1 收敛于 $F(x)$ 的充要条件是 $F(x)\in L$．我们证得[20]：在同样的条件下序列 $\{n^{-r}S_n^{(r)}(x)\}$ L^1 收敛（$r=1,2,\cdots$），且级数（1）的 r 阶导级数（$r=0,1,2,\cdots$）L^1 收敛于 $F^{(r)}(x)$ 的充要条件是 $F^{(r)}(x)\in L$．

Garrett 和 Stanojević 还证明：若 $F(x)\in L$ 则级数（1）L^1 收敛于 $F(x)$ 的充要条件是 $\{n^{-1}S_n'(x)\}$ L^1 收敛．反之，若 $\{n^{-1}S_n'(x)\}$ L^1 收敛，则级数（1）L^1 收敛于 $F(x)$ 的充要条件是 $F(x)\in L$．

对于 $\sigma_n(x)$，Garrett 和 Ress，Stanojević[6] 证得：若 $F(x)\in L$ 且 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 为拟单调序列，则 $S_n(x)$ L^1 收敛于 $\sigma_n(x)$ 的充要条件是 $(a_n+b_n)\lg n=o(n)$．我们发现[20]：其中的 $\sigma_n(x)$ 还可用更一般的平均，例如 $R_n^{\alpha}(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[1-\left(\frac{k}{n+1}\right)^{\alpha}\right]\left(S_k(x)-S_{k-1}(x)\right)$ $(\alpha>0)$ 来代替．显然 $\alpha=1$ 时 $R_n^1(x)=\sigma_n(x)$．

设 $A_n\geqslant 0$，Garrett 和 Stanojević 还证得如下结果：

（i） 若 $\|\sigma_n(x)-F(x)\|=o(A_n)$ 则 $\|S_n(x)-F(x)\|=O(A_n)\Leftrightarrow\|S_n'(x)\|=O(A_n)$，

（ii） 若 $\|S_n(x)-F(x)\|=O(A_n)$，则 $\|\sigma_n(x)-F(x)\|=O(A_n)\Leftrightarrow\|S_n'(x)\|=O(nA_n)$

（iii） 若 $\|S_n'(x)\|=O(nA_n)$，则 $\|\sigma_n(x)-F(x)\|=O(A_n)\Leftrightarrow\|S_n(x)-F(x)\|=O(A_n)$．

最近卢志康[24] 证明：设级数（1）是 $F(x)\in L_{2\pi}$ 的富里埃级数，其系数满足条件：

$$\lim_{\lambda\to 1}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{j=n}^{[\lambda n]}j^{p-1}\left|\Delta\binom{a_j}{b_j}\right|^p=o(1<p\leqslant 2), \quad (*)$$

则级数（1）L^1 收敛于 $F(x)$ 的充要条件是 $\binom{a_n}{b_n}\lg n=o(1)$．容易看出当 $b_n=0$ 时 § 1.1 中的系数条件 $\{a_n\}\in V_p(1<p\leqslant 2)$ 比这里的条件（*）强，故这一结果改进了Bojanic[8] 的工作．同时将原来余弦级数的 L^1 收敛推广到一般三角级数的 L^1 收敛．此外，顾小敏[27] 还从另一方面减轻了 Bojanic 的条件，他证明：如果 $(a_n)(b_n)\in H^*=\left\{(a_n)(b_n):\sum_{k=n+1}^{2n-2}\|\Delta a_kD_n(x)+\Delta b_k\bar{D}_n(x)\|_L=o(1)\right\}$，则级数（1）$L^1$ 收敛于 $F(x)$ 的充要条件是 $\binom{a_n}{b_n}\lg n= o(1)$，容易看出，当 $b_n=0$ 时 $H^*\supset V_p(1<p\leqslant 2)$．他还证明：若 $(|a_n|+|b_n|)\lg n=o(1)$，级数（1）L^1 收敛于 $F(x)$ 的充要条件是 $(a_n)(b_n)\in H^*$．

1978年 Stanojević 证明过：如果 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都是拟单调序列则级数（1）L^1 收敛于 $F(x)$ 的充要条件是 $(a_n+b_n)\lg n=o(1)$．最近黄振高[28] 在同一条件下，探求级数（1）的

负阶蔡查罗平均 $\sigma_n^{\alpha}(x)(-1\leqslant\alpha<0)$ L^1 收敛，他证得：

(i) $-1<\alpha\leqslant 0$ 时 $\|\sigma_m^{\alpha}(x)-F(x)\|=o(1)\Longleftrightarrow\left\|\sum_{k=n}^{2n-1}(\alpha)_{2n-1-k}A_k(x)\right\|=o(n^{\alpha})$，这里 $A_k(x)=a_k\cos kx+b_k\sin kx$. 由此可得到：

(ii) $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$时，$\|\sigma_n^{\alpha}(x)-f(x)\|=o(1)\Longleftrightarrow|a_n|+|b_n|=o(n^{\alpha})$.

(iii) $-1<\alpha<0$ 时，如果 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都是拟单调序列，则

$$\|\sigma_n^{\alpha}(x)-f(x)\|=o(1)\Longleftrightarrow(a_n+b_n)=o(n^{\alpha}).$$

2.2 设 $f_n(x)=\frac{1}{2}(a_0+a_{n-1})+\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})\cos kx$, $\bar{f}_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})\sin kx$, 当 $f_n(x)$ 与 $\bar{f}_n(x)$ 都收敛时分别记其极限为 $f(x)$ 与 $\bar{f}(x)$，现在要问系数 $\{a_n\}$ 满足什么条件时函数序列 $\{f_n\}$ 才能 L^1 收敛于 $f(x)$. 1976年Garrett 和 Stanojevič[6] 指出：当 $\{a_n\}$ 是有界变差序列时 $\{f_n\}$ L^1 收敛于 $f(x)$ 的充要条件是 $\{a_n\}\in C$、假如系数条件稍稍加强，使 $\{a_n\}$ 为拟凸序列或满足不等式 $\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta a_n|\lg n<\infty$，则 $\{f_n\}$ L^1 收敛于 $f(x)$. 他们又继续指出：如果将 $\{a_n\}$ 分解为两个无穷小序列 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ 之和，假定 $\{\alpha_n\}$ 是拟凸的、$\{\beta_n\}$ 满足不等式 $\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta\beta_n|\lg n<\infty$，则 $f\in L$ 且 $\{f_n\}$ L^1 收敛于 $f(x)$. 又若将 $\{a_n\}$ 分解为两个序列 $\{\gamma_n\}$，$\{\delta_n\}$ 之积，如果 $\{\gamma_n\}$ 是有界变差的，$\{\delta_n\}$ 是拟凸的且 $|\delta_n|\leqslant M$，$\sum_{n=1}^{\infty}|\delta_n\Delta\gamma_n|\lg n<\infty$，则 $f\in L$ 且 $\{f_n\}$ L^1 收敛于 $f(x)$.

1979年Singh与 Sharma[5]将拟凸的系数条件减轻为 $\{a_n\}\in S^1$，同样得到函数序列 $\{f_n\}$ L^1 收敛于 $f(x)$. 我们进一步改进这个结果，证得[21]：若 $\{a_n\}\in S_{\alpha}(\alpha\geqslant 0)$，则对 $r\in\{0,1,\cdots[\alpha]\}$ 有 $\|f_n^{(r)}-f^{(r)}\|=o(n^{r-\alpha})$. 当 $r=0$, $\alpha=0$ 时，这就是 Singh 与 Sharma 的结果. 我们还证明：当 $\{a_n\}\in BV_{(r)}(r=0,1,2\cdots)$ 时，$\{f_n^{(r)}\}$ L^1 收敛于 $f^{(r)}$的充要条件是 $\{a_n\}\in C^{(r)}$. 置 $r=0$ 即获得 Garrett 和 Stanojevič 的第一个结果. 当 $\{a_n\}\in S$ 时我们还证得下面三个条件是等价的. (i) $\|\bar{f}_n-\bar{f}\|=o(1)$ 且 $a_n\lg n=o(1)$, (ii) $\Sigma\frac{|a_n|}{n}<\infty$且 $a_n\lg n=o(1)$. (iii) $\|\bar{S}_n-\bar{f}\|=o(1)$.

2.3 写 $[F]\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{F}_n e^{int}$. 设 $\sigma[F]$ 是一个富里埃级数. Stanojevič[15] 指出：如果系数 $\hat{F}_n$是渐近偶的，即满足

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|\hat{F}_j-\hat{F}_{-j}|\lg j=o(1), \lim_{\lambda\to 1+0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{j=n}^{[\lambda n]}|\Delta(\hat{F}_j-\hat{F}_{-j})|\lg j=0$$

那么，如果对某一 $p(1<p\leqslant 2)$ 有 $\lim_{\lambda\to 1+0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\sum_{j=n}^{[\lambda n]}j^{p-1}|\Delta\hat{F}_j|^p\right\}^{\frac{1}{p}}=0$. 则 $\|S_n(x)-F(x)\|==o(1)\Longleftrightarrow\|\hat{F}_nE_n+\hat{F}_{-n}E_{-n}\|=o(1)$，这里 $E_n=E_n(t)=\sum_{k=0}^{n}e^{ikt}$.

如果考虑实值函数，卢志康[24]指出，系数是渐近偶的条件可以省去，从而可以获得有用的推论. 这已在§2.1中提及.

设 $\theta_0\geqslant 0$. 记 $K(\theta_0)$ 为复平面上角形区域 $\{z:|\arg z|\leqslant\theta_0\}$、又设 $\{c_n\}_0^{\infty}$是一复数列，如

果有 $\theta_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使 $\Delta C_n\in K(\theta_0)(n=0,1,\cdots)$，则说 $\{C_n\}$ 是单调的．如果有 $\theta_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 以及 $a\geqslant 0$ 使 $\Delta C_n+\frac{a}{n}\in K(\theta_0)(n=0,1,2,\cdots)$，则说 $\{C_n\}$ 是拟单调的．

最近 Stanojevič[19] 证得：如果 $F(x)$ 的富里埃系数 $\hat{F}_n$ 满足条件 $\lim\limits_{\lambda\to 1+0}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left\{\sum\limits_{j=n}^{[\lambda n]}j^{p-1}|\Delta\hat{F}_j|^p\right\}^{\frac{1}{p}}=0$．且 $\{\hat{F}_n\}_0^\infty$ 是拟单调的，当 $p\in(1,2]$ 时有

$$\lim_{\lambda\to 1+0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,n^{1-\frac{1}{p}}\operatorname*{Max}_{n\leqslant j\leqslant[\lambda n]}|\Delta\hat{F}_j|^{1-\frac{1}{p}}\operatorname*{Max}_{n\leqslant j\leqslant[\lambda n]}|\hat{F}_j|^{\frac{1}{p}}=0. \qquad (*)$$

则 $\sigma[F]L^1$ 收敛于 $F(x)$ 的充要条件是 $\hat{F}_n\lg|n|=o(1)$．不久谢庭藩[26]即指出上述条件（*）是多余的．谢庭藩还进一步证明：若函数 $F(x)$ 的富里埃系数序列 $\{\hat{F}_n\}$ 与 $\{\hat{F}_{-n}\}$ 都是拟单调的．则 $\sigma(F)L^1$ 收敛于 $F(x)$ 的充要条件是 $\hat{F}_n\ln|n|=o(1)$．

§3．关于三角级数的 L^1 逼近

上述关于三角级数 L^1 收敛的一些结果，已被人们推广到 L^1 逼近．首先谢庭藩[25]改进了§2中提及的 Garrett 和Ress, Sianojevič[9] 的工作．证得：若富里埃级数（1）的系数为拟单调的，则有常数 $c_1,c_2>0$，使

$$\frac{C_1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+1-k}(a_k+b_k)\leqslant\|\sigma_n(x)-S_n(x)\|\leqslant\frac{C_2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\ln(k+1).$$

谢还进一步指出上式中的（C．1）平均 $\sigma_n(x)$ 可以改为更一般的 Vallè-Possin 平均 $z_n(x)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=n}^{2n-1}S_k(x)$，获得关系式

$$C_1\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{n+k}+b_{n+k}}{k}\leqslant\|z_n(x)-S_n(x)\|$$

$$\leqslant C_2\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_{n+k}+b_{n+k}}{k}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n+k}+b_{n+k})\lg(k+1).\right.$$

这个结果含有如下的推论，设富里埃级数（1）的系数是拟单调的则有

$$\|z_n(x)-S_n(x)\|=o(1)\Longleftrightarrow(a_n+b_n)\lg n=o(1).$$

取 $z_n(x)=\sigma_n(x)$ 即为〔9〕的结果．

在级数（1）的系数为拟单调的假定下，谢庭藩[25]又从另一方面获得比 L^1 收敛更强的结果：

（i）设 $F(x)$ 的富里埃系数是拟单调的，又说 φ_n 单调下降趋于零，且 $\varphi_n=O(\varphi_{2n})$ 则 $\|S_n(x)-F(x)\|=O(\varphi_n)\Longleftrightarrow(a_n+b_n)\ln n=O(\varphi_n)$，$E_n(F)=O(\varphi_n)$．

这里 $E_n(F)$ 为 $F(x)$ 的最佳逼近．

（ii）设 $F(x)$ 的富里埃系数是拟单调的．若 $F^{\prime}(x)\in L_{2\pi}$ 则

$$\|F(x)-S_n(x)\|=O\left\{\frac{1}{(n+1)^r}\omega\left(F^{(r)},\frac{1}{n+1}\right)_L\right\}$$

成立的充要条件是

$$(a_n+b_n)\ln n=O\left\{\frac{1}{(n+1)^r}\omega\left(F^{(r)},\frac{1}{n+1}\right)\right\}.$$

写 $H_n=\sum_{\nu=n+1}^{2n-2}\Delta a_\nu D_\nu(x)+\Delta b_\nu\overline{D}_\nu(x)$，$H^*=\{(a_n)(b_n):\|H_n\|=o(1)\}$.

顾小敏证明[27]：设 φ_n 为单调下降趋于零的序列，级数（1）为富里埃级数，则

（i）当 $\|H_n\|=O(\varphi_n)$ 时，$\|S_n(x)-F(x)\|=O(\varphi_n)\Longleftrightarrow E_n(F)=O(\varphi_n)$

（ii）当 $(|a_n|+|b_n|)\ln n=O(\varphi_n)$，$E_n(F)=O(\varphi_n)$ 时，

$$\|S_n(x)-F(x)\|=O(\varphi_n)\Longleftrightarrow\|H_n\|=O(\varphi_n).$$

由此得到有用的推论：

推论 1 设 $(a_n)(b_n)\in H^*$ 则

i）$\|S_n(x)-F(x)\|=o(1)\Longleftrightarrow(|a_n|+|b_n|)\ln n=o(1)$

ii）当 $(|a_n|+|b_n|)\ln n=o(1)$ 时，$\|S_n(x)-F(x)\|=o(1)\Longleftrightarrow(a_n)(b_n)\in H^*$

这就是在§2.1 中提及的 Bojanic 定理的推广.

推论 2 设 $\sum_{k=n+1}^{2n-2}(|\Delta a_k|+|\Delta b_k|)\ln(k+1)=O(\varphi_n)$，则

$$\|S_n(x)-F(x)\|=O(\varphi_n)\Longleftrightarrow E_n(F)=O(\varphi_n),\ (|a_n|+|b_n|)\ln n=O(\varphi_n).$$

这个推论包含〔6〕中定理 C.

顾小敏还从另一方面推广了 Bojanic 和 Stanojevič[8] 的结果. 他证明：设级数（2）为 $f\in L_{2\pi}$ 的富里埃级数. φ_n 是单调下降趋于零的序列且 $\left(\sum_{k=n+1}^{2n-2}\frac{1}{n}k^p|\Delta a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=O(\varphi_n)$ 则 $\|S_n(x)-f(x)\|=O(\varphi_n)$ 等价于 $a_n\lg n=O(\varphi_n)$，$E_n(f)=O(\varphi_n)$.

参考文献

〔1〕N. Singh and K. M. Sharma, PAMS, 72(1978), 117—120.

〔2〕N. Singh and K. M. Sharma, J. sci. Engrg. 1(1979)137—140.

〔3〕J. W. Garrett and Č. V. Stanojevič, AMS, 22(1975), A—166.

〔4〕S. T. Telyakovskiĭ, Mat. Zametki, 14(1973), 317—328.

〔5〕Г. А. Фомин, Мат. Заметки T23, 2(1978), 317—325.

〔6〕J. W. Garrett and Č. V. Stanojevič, PAMS, 54(1976), 101—105.

〔7〕Č. V. Stanojevič, PAMS, 82(1981), 209—215.

〔8〕R. Bojanic and Č. V. Stanojevič, TAMS, 269(1982), 677—683.

〔9〕J. W. Garrett, C. S. Ress and Č. V. Stanojevič, PAMS, 72(1978) 535—538.

〔10〕W. O. Bray, PAMS, 83(1981) 59—62.

〔11〕С. А. Теяковский, Г. А. Фомин, Труды Мат. ИНСТ. АНСССР, 134(1975), 310—313.

〔12〕J. W. Garrett, C. S. Ress and Č. V. Stanojevič, PAMS, 80(1980) 423—430.

〔13〕J. W. Garrett and Č. V. Stanojevič, PAMS, 60(1976) 68—71.

〔14〕Г. А. Фомин, Мат. Заметки, T21, 4(1977), 24—28.

〔15〕Č. V. Stanojevič, TAMS, 271(1982), 237—244.

〔16〕A. Kolmogoroff, Bull. Acad. Polor, sci. A(1932), 83—86.

〔17〕Н. К. Бари, Тригонометрический ряды, 1961. 〔18〕W. O. Bray, PAMS, 88(1983), 34—38.

〔19〕V. B. Stanojlvic, PAMS, 85(1982), 241—247. 〔20〕盛淑云，《杭大学报》，3(1981), 226—236.

〔21〕盛淑云，杨义群，《科学通报》，4(1983). 〔22〕盛淑云，《科学通报》，22(1983).

〔23〕盛淑云，《自然杂志》，2(1984). 〔24〕卢志康，待发表. 〔25〕谢庭藩，《科学通报》，4(1983).

〔26〕谢庭藩. 〔27〕顾小敏. 〔28〕黄振高，待发表.