1987年2月 数学研究与评论
第七卷 第一期

关于布尔代数公理的独立性问题*

朱秉涛

（华南工学院）

近年来，有些作者，如参考文献〔1〕、〔2〕、〔3〕，都证明了下列布尔代数中 E. V. Huntington 的八条公理是相互独立的〔注〕：

B_{1+} $a+b=b+a$，

$B_{1.}$ $a\cdot b=b\cdot a$，

B_{2+} $a+0=a$，

$B_{2.}$ $a\cdot 1=a$，

B_{3+} $a+b\cdot c=(a+b)\cdot(a+c)$，

$B_{3.}$ $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$，

B_{4+} $a+a'=1$，

$B_{4.}$ $a\cdot a'=0$.

我认为，他们的结论是错误的．事实上，上列的八条公理不是相互独立，就是说，其中有两条可以从其余六条推证出来，例如，$a\cdot 1=a$和$a\cdot b=b\cdot a$可以从其余六条推证出来（或者$a+0=a$和$a+b=b+a$也可以从其余六条推证出来）．为了说明这一事实，只要证明下列的性质1～8就够了：

性质1 $a\cdot 0=0$．

性质2 $1\cdot a=a$．

性质3 $0'=1, 1'=0$．

性质4 对于布尔代数中的任何元素a，它的补元a'是唯一的．

性质5 $a\cdot a=a$．

性质6 $a\cdot 1=a$．

性质7 $a+a=a$．

性质8 $a\cdot b=b\cdot a$．

对于性质1，我们有

$$
\begin{aligned}
a\cdot 0&=a\cdot 0+0 \quad (\text{由}B_{2+})\\
&=0+a\cdot 0 \quad (\text{由}B_{1+})\\
&=a\cdot a'+a\cdot 0 \quad (\text{由}B_{4.})\\
&=a\cdot(a'+0) \quad (\text{由}B_{3.})\\
&=a\cdot a' \quad (\text{由}B_{2+})\\
&=0.(\text{由}B_{4.})
\end{aligned}
$$

* 1984年11月27日收到.

注：这里的0, 1, a, b, c, …. 是布尔代数中的元素，+、·、'，是布尔代数中的并、交、补．

对于性质2，我们有

$$
\begin{aligned}
1\cdot a &= (a+a')\cdot a \quad (\text{由}B_{4+})\\
&= (a+a')\cdot(a+0) \quad (\text{由}B_{2+})\\
&= a+a'\cdot 0 \quad (\text{由}B_{3+})\\
&= a+0 \quad (\text{由性质1})\\
&= a. \quad (\text{由}B_{2+})
\end{aligned}
$$

对于性质3，我们有

$$
\begin{aligned}
0' &= 0'+0 \quad (\text{由}B_{2+})\\
&= 0+0' \quad (\text{由}B_{1+})\\
&= 1. \quad (\text{由}B_{4+})\\
1' &= 1\cdot 1' \quad (\text{由性质2})\\
&= 0. \quad (\text{由}B_{4.})
\end{aligned}
$$

对于性质4，假设a的补元有两个a'和a^*，并且都能满足公理B_4，于是有

$$
\begin{aligned}
a &= a'+0 \quad (\text{由}B_{2+})\\
&= a'+a\cdot a^* \quad (\text{由}B_{4.})\\
&= (a'+a)\cdot(a'+a^*) \quad (\text{由}B_{3+})\\
&= (a+a')\cdot(a'+a^*) \ (\text{由}B_{1+})\\
&= 1\cdot(a'+a^*) \quad \text{由}B_{4+})\\
&= a'+a^*. \quad (\text{由性质2})
\end{aligned}
$$

同理有 $a^*=a'+a^*.$

所以 $a'=a^*.$

对于性质5，我们有

$$
\begin{aligned}
a\cdot a &= (a+0)\cdot(a+0) \quad (B_{2+})\\
&= a+0\cdot 0 \quad (\text{由}B_{3+})\\
&= a+0 \quad (\text{由性质1})\\
&= a. \quad (\text{由}B_{2+})
\end{aligned}
$$

对于性质6，我们有

$$
\begin{aligned}
a\cdot 1 &= a\cdot(a+a') \quad (\text{由}B_{4+})\\
&= a\cdot a+a\cdot a' \quad (\text{由}B_{3.})\\
&= a\cdot a+0 \quad (\text{由}B_{4.})\\
&= a\cdot a \quad (\text{由}B_{2+})\\
&= a. \quad (\text{由性质5})
\end{aligned}
$$

对于性质7，我们有

$$
\begin{aligned}
a+a &= (a+a)\cdot 1 \quad (\text{由性质6})\\
&= (a+a)\cdot(a+a') \ (\text{由}B_{4+})\\
&= a+a\cdot a' \quad (\text{由}B_{3+})\\
&= a+0 \quad (\text{由}B_{4.})
\end{aligned}
$$

$$=a\cdot \qquad (由 B_{2+})$$

对于性质8，我们有

$$\begin{aligned}
a\cdot b &= a\cdot b+0 && (由 B_{2+})\\
&= a\cdot b+b\cdot b' && (由 B_{4.})\\
&= (a\cdot b+b)\cdot(a\cdot b+b') && (由 B_{3+})\\
&= (b+a\cdot b)\cdot(a\cdot b+b') && (由 B_{1+})\\
&= [(b+a)\cdot(b+b)]\cdot(a\cdot b+b') && (由 B_{3+})\\
&= [(b+a)\cdot b]\cdot(a\cdot b+b') && (由性质7)\\
&= [(b+a)\cdot b]\cdot(b'+a\cdot b) && (由 B_{1+})\\
&= [(b+a)\cdot b]\cdot[(b'+a)\cdot(b'+b)] && (由 B_{3+})\\
&= [(b+a)\cdot b]\cdot[(b'+a)\cdot(b+b')] && (由 B_{1+})\\
&= [(b+a)\cdot b]\cdot[(b'+a)\cdot 1] && (由 B_{4+})\\
&= [(b+a)\cdot b]\cdot(b'+a) && (由性质6)\\
&= [(b+a)\cdot(b+0)]\cdot(b'+a) && (由 B_{2+})\\
&= (b+a\cdot 0)\cdot(b'+a) && (由 B_{3+})\\
&= (b+0)\cdot(b'+a) && (由性质1)\\
&= b\cdot(b'+a) && (由 B_{2+})\\
&= b\cdot b'+b\cdot a && (由 B_{3.})\\
&= 0+b\cdot a && (由 B_{4.})\\
&= b\cdot a+0 && (由 B_{1+})\\
&= b\cdot a. && (由 B_{2+})
\end{aligned}$$

从上面的事实来看，除去Huntington.E.V.八条公理中的$a\cdot 1=a$和$a\cdot b=b\cdot a$，对于布尔代数的并和交仍然可以交换、结合和分配．因此我认为，可以选取Huntington.E.V.公理中的B_{1+}、B_{2+}、B_{3+}、$B_{3.}$、B_{4+}、$B_{4.}$这六条作为布尔代数的公理[注]．关于这六条公理的独立性也是容易证的．为此，对于公理B_{1+}的独立性，可用由六个元素0,1,2,3,4,5 所构成的模型$D_{B_{1+}}$来证明，$D_{B_{1+}}$中并⊕、交⊙、补⊙的运算规则如下各表所示：

⊕	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	1	1	2
3	3	1	1	3	3	1
4	4	1	1	4	4	1
5	5	1	5	1	1	5

（表1）

⊙	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	2	0	0	2
3	0	3	0	3	3	0
4	0	4	0	4	4	0
5	0	5	5	0	0	5

（表2）

	⊙
0	1
1	0
2	3
3	2
4	5
5	4

（表3）

从上面各表中可以看出，模型$D_{B_{1+}}$满足公理B_2、B_{4+}、$B_{4.}$是显然的．通过核验，也可以证明模型$D_{B_{1+}}$满足公理$B_{3.}$和$B_{3.}$．但是，$2\oplus 5\neq 5\oplus 2$，$3\oplus 4\neq 4\oplus 3$，所以模型

注：也可以选取Huntington.E.V 公理中的$B_{1.}$、$B_{2.}$、B_{3+}、$B_{3.}$、B_{4+}、$B_{4.}$这六条作为布尔代数的公理．

D_{B_1} 不满足公理B_{1-}．这就证明了公理B_{1-}是独立的．

至于其他五条公理的独立性，则可用由2^n个布尔代数的元素0，1，a、b、c、…、f所构成的模型D_i来证明（这里的i为B_{2+}、B_{3+}、$B_{3.}$、B_{4+}、$B_{4.}$，n为有限的自然数，当$n=1$时，D_i中的元素为0与1），D_i中任意元素x、y的并⊕、交⊙、补⊙如下表所示．

能证明是独立的公理及其所对应的模型D_i	模型D_i中所定义的并⊕、交⊙、补⊙		
$a+0=a$，$D_{B_{2+}}$	$x\oplus y=1$	$x\odot y=y$	$x^{\odot}=0$
$a+b\cdot c=(a+b)\cdot(a+c)$，$D_{B_{3+}}$	$x\oplus y=x'\cdot y+x\cdot y'$	$x\odot y=x\cdot y$	$x^{\odot}=x'$
$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$，$D_{B_{3.}}$	$x\oplus y=x+y$	$x\odot y=(x'+y)\cdot(x+y')$	$x^{\odot}=x'$
$a+a'=1$，$D_{B_{4+}}$	$x\oplus y=x+y$	$x\odot y=x\cdot y$	$x^{\odot}=0$
$a\cdot a'=0$，$D_{B_{4.}}$	$x\oplus y=x+y$	$x\odot y=x\cdot y$	$x^{\odot}=1$
附　注	表中的+、·、′分别是布尔代数中的并、交、补		

（表　4）

为了节省篇幅，这里把证明略去了．

参　考　文　献

[1] R．L．古德斯坦因（刘文、李忠傧译），布尔代数，科学出版社，1975．

[2] F．Gerrish，The independence of huntington's axiom for Boolean algebra，Math．Gaz．J．Math．Assc．vol．62．No．119，33—42，1978．

[3] 戴世虎：布尔代数，湖南教育出版社，1984．