评V.I.Arnold问题

段魁臣

（新疆大学）

一、一个共同存在的问题

1976年V．I.Arnold提出：向量场是由固定次数带有有理系数多项式来给定，是否能给出一个稳定性的判定准则？

王联、王慕秋在文〔2〕中解决了当$n=2$情况下的V．I.Arnold问题，杨世藩同志在文〔3〕中对$n=3$的情况进行了研究，并得到很好的结果，但在对于系统：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_1x+a_2y+\alpha_1x^2+\alpha_2xy+\alpha_3xy+\gamma_1x^3+\gamma_2x^2y+\gamma_3xy^2+\gamma_4y^3 \\ \dfrac{dy}{dt}=b_1x+b_2y+\beta_1x^2+\beta_2xy+\beta_3y^2+\delta_1x^3+\delta_2x^2y+\delta_3xy^2+\delta_4y^3 \end{cases} \tag{1}$$

当$q=0$，$p=0$ 而$b_1^2+a_2^2\neq0$ 时得出：不论（1）的系数如何平凡解总是不稳定的结论——即又〔3〕中的定理6——并又进一步推广到：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_1x+a_2y+X(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt}=b_1x+b_2y+Y(x,y) \end{cases}$$

只要$X(x,y)$、$Y(x,y)$是解析的、次数至少为2的多项式，不管系数如何，在$q=0$、$p=0$、而$b_1^2+a_2^2\neq0$ 情形下，平凡解总是不稳定的．显然这个结论是不成立的，现举一反例：

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=-v^3 \\ \dfrac{dv}{dt}u-u^2v \end{cases} \tag{*}$$

它属于文〔3〕中II_1、类型，满足定理6的条件即：$q=0$　$p=0$，$b_1^2+a_2^2\neq0$．如我们取正定的 Ляпунов 函数：

$\bar{v}(u,v)=2u^2+v^4$

有$\dot{\bar{v}}\big|_{(*)}=-4u^2v^4\leq0$

它是常负的．当$\dot{\bar{v}}=0$ 时只能得：$u=v=0$．由 Барбашин — Красовский 定理．故知（*）对零解是全局渐近稳定的．因此文〔3〕中的定理6及其推广是不成立的．

产生这个结论的原因：是作者忽视了Четаев 定理的第二个条件：若对系统（*）取 Ляпунов 函数：$\bar{v}=uv$它在第一象限取正值，在u、v轴上$\bar{v}=0$ 满足Четаев 定理第一个条件，

1985年1月1日收到

但：$\dot{v}|_{(*)} = u^2 - (u^2v + v^4)$，无论在第一象限取原点的多么小邻域总有$u, v$存在，使当$v^4 > u^2$时有：$(uv + \frac{v}{u^2}) > 1$，所以有$\dot{v}|_{(*)} < 0$，故$\dot{v}$不能在$\dot{v} > 0$ 的区域内永远为正，当然不能满足Четаев 定理的第二个条件，因此就不能得到（*）不稳定的结论.

由于文〔3〕中定理6及其推广，给后来的文〔4〕、〔5〕、〔6〕在相同的部分被引用，因此，都存在同样错误. 在本文结束时看到文〔7〕，该文不再引用〔3〕的错误结论了.

二、稳定性的判定

对于系统（1），当$p = -(a_1 + b_2) = 0, q = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ 且$b_1^2 + a_2^2 \neq 0$ 时作零解稳定性的判定.

为 在（1）中当$a_2 \neq 0$ 时作变换 $\begin{cases} u = -b_2x + a_2y, \\ v = x, \end{cases}$

当$b_1 \neq 0$ 时作变换 $\begin{cases} u = b_1x - a_1y \\ v = y, \end{cases}$

系统（1）就化为

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A_1u^2 + A_2uv + A_3v^2 + C_1u^3 + C_2u^2v + C_3uv^2 + C_4v^3 \\ \dfrac{dv}{dt} = u + B_1u^2 + B_2uv + B_3v^2 + P_1u_3 + D_2u^2v + D_3uv^2 + D_4v^3 \end{cases}$$

再令$u = y, v = x$，则上式成立

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + B_1y^2 + B_2xy + B_3x^2 + D_1x^3 + D_2y^2x + D_3yx^2 + D_4x^4 \equiv y + X(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = A_1y^2 + A_2xy + A_3x^2 + C_1y^3 + C_2y^2x + C_3yx^2 + C_4x^3 \equiv Y(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

由特征方程有双零根时的Ляпунов 判定准则知：

$$y + B_1y^2 + B_2yx + B_3x^2 + D_1y^3 + D_2y^2x + D_3yx^2 + D_4x^3 = 0 \quad (**)$$

当$x = 0$ 时，$y = 0$，故有解；把$f(x) \equiv y \equiv \sum_{i=1}^{\infty} a_ix^i$ 代入（**），令x^i的系数为零，得：

$$\begin{aligned} & a_1 = 0 && \text{即} a_1 = 0 \\ & a_2 + B_1a_1^2 + B_3 + B_2a_1 = 0 && a_2 = -B_3 \\ & a_3 + 2B_1a_1a_2 + B_2a_2 + D_1a_1^3 + D_3a_1 + D_4 = 0 && a_3 = B_2B_3 - D_4 \\ & a_4 + B_2(B_2B_3 - D_4) + B_3(B_1B_3 - D_3) = 0 && a_4 = -B_2(B_2B_3 - D_4) \\ & && \quad -B_3(B_1B_3 - D_3) \end{aligned}$$

一般项：

$$a_n = [B_2a_{n-1} + D_3a_{n-2} + B_1\sum_{i=1}^{n-1} a_ia_{n-i} + D_2\sum_{i=1}^{n-2} a_ia_{n-i-1} + D_1\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1} a_ia_ja_{n-i-j}] \quad (n > 4).$$

显然，当$a_2 = a_3 = 0$ 时，对一切$a_k = 0$ 把$y = \sum_{i=2}^{\infty} a_ix^i$ 代入（2）式第二个方程右端，得：

$$f(x) \equiv A_1(\sum_{i=2}^{\infty} a_ix^i)^2 + A_2x(\sum_{i=2}^{\infty} a_ix^i) + A_3x^2 + C_1(\sum_{i=2}^{\infty} a_ix^i)^3$$

$$+c_2x\left(\sum_{i=2}^{\infty}a_ix^i\right)^2+c_3x^2\left(\sum_{i=2}^{\infty}a_ix^i\right)+c_4x^3$$

$$=E_2x^3+E_3x^3+E_4x^4+\cdots\cdots,$$

其中：$E_2=A_3$，$E_3=A_2a_2+C_4$，$E_4=A_1a_2^2+A_2a_3+c_3a_2$，……，

$$E_n=A_2a_{n-1}+c_3a_{n-2}+A_1\sum_{i=1}^{n-1}a_ia_{n-i}+c_1\sum_{j=2}^{n-4}a_ia_{n-2-j}a_i+c_2\sum_{i=1}^{n-2}a_ia_{n-i-1};$$

$n>1$ 时$a_1=0$.

显然，当$a_2=a_3=0$ 时，E_k（$k\geq1$）皆为零 再由：

$$\varphi(x)\equiv\frac{\partial Y}{\partial y}-y'(x)\left(1+\frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

$$=2A_1y+A_2x+3c_1y^2+2c_2yx+c_3x^2-y'(x)[1+1+2B_1y+B_2x+3D_1y^2+2D_2yx+D_3x^2],$$

把上式求到的$y(x)\equiv f(x)$ 代入，并整理x^i前系数，得：

$$\varphi(x)=F_1x+F_2x^2+F_3x^3+F_4x^4+\cdots\cdots,$$

其中，$F_1=A_2-4a_2$，$F_2=2A_1a_2+c_3-3a_3-2B_2a_2$，$F_3=2A_1a_3+2c_2a_2-4a_4-4B_1a_2^2-3B_2a_3-2D_3a_2$，$F_4=2A_1a_4+3c_1a_2^2+2c_2a_3-5a_5-10B_1a_2a_3-4B_2a_4-4D_2a_2^2-3D_3a_3$ ……，

一般项：
$$F_n=2A_1a_n+3c_1\sum_{i=1}^{n-1}a_ia_{n-i}+2c_2a_{n-1}-rB_2a_n$$

$$-(n-1)D_3a_{n-1}-3D_1\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1}(n-i-j+1)a_ia_ja_{n-i-j-1}$$

$$-2D_2\sum_{i=1}^{n-1}(n-2)a_ia_{n-i}-2B_1\sum_{i=1}^{n-1}(n-i+1)a_ia_{n-j+1}-(n+1)a_{n+1}.$$

其中$n>1$ 时，$a_1=0$，当$a_2=a_3=0$ 时，对一切$F_i=0$（$i\geq3$），由$f(x)=E_2x^2+E_3x^3+E_4x^4+\cdots\cdots$，$\varphi(x)=F_1x+F_2x^2+F_3x^3+F_4x^4\cdots\cdots$，

按Ляпунов 判定准则〔1〕，系统（1）成（2）的稳定性见下表.

类别 \ 稳定性	稳定性		
	不稳定	稳　定	渐近稳定
$f(x)=0$ $\varphi(x)=0$	不　稳		
$f(x)=0$ $\varphi(x)=gx^a+\cdots$	a=整数 或a=偶数 $g>0$	a=偶数 $g<0$	
$f(x)=gm^m+$	m=偶数 或m=整数 $g>0$		

续前表

	a偶数$<m$ 当$a>0$ 时	a偶数$<m$ 当$a<0$ 时	
$f(x)=gx^m+\cdots\cdots$ m奇数$g<0$	a奇数$<\frac{m-1}{2}$		
	a奇数$=\frac{m-1}{2}$和 $a^2+a(m+1)g\geq 0$		
$\varphi(x)=ax^a+\cdots\cdots$ （或$\varphi(x)=0$ ）	$u_k=e^{\int_0^\theta R_1 d\theta}(n\theta+u)$ $n>0$ 而u为周期	$u_1, u_2, \cdots\cdots$ 为周期函数	$u_k=e^{\int_0^\theta R_1 d\theta}(n\theta+v)$ $n<0$ 而v为周期数

参 考 文 献

[1] A. M. Ляпунов, Исследование одного изособенных случаев задачи об устойчивости движения ленинградского университета (1963).

[2] 王联、王幕秋，论$n=2$情形下V. I. Arnold 问题，科学通报，24:8（1979），342—347.

[3] 杨世藩，论$n=3$ 情形下的V. I. Arnold 问题高次奇点稳定性，应用数学学报，6 卷 4 期（1983，10）.

[4] 权宏顺，$n=4$ 情形下V. I. Arnold 问题高次奇点稳定性，兰大学报，18（2）（1982）.

[5] 章荣发，论$n=5$ 情形下的V. I. Arnold 问题高次奇点稳定性，新疆大学学报，83年一、二期（合订本）.

[6] 章荣发，V. I. Arnold 问题对任意n时高次奇点的稳定性，新疆大学学报，84年第 3 期.