一 点 看 法*

程立新　陈连昌

（大庆石油学院）

数学研究与评论1984年第四期刊登了刘证同志的“L^p-orthogonality in Banach Spaces”（以下简称文献〔1〕）一文，此文给出了Banach空间的L^p一正交元的“存在性”及“唯一性”定理（文献〔1〕的定理1,2），这无疑证明了L^p-正交性（$p>1$）的提法对任何一个Banach 空间都是非空的，为L^p-正交性的研究提供了理论依据。但就文献〔1〕中某些定理及推论的价值问题，笔者在此提出拙见，与刘证同志商榷。在文献〔1〕的推论1,6,7,9,定理8的条件下，$p=2$时，James和Day已经在文献〔2〕，〔3〕给出了结论：此时所讨论的空间必为Hilbert空间。再注意到定理3的条件与上述定理及推论的条件等价（下面将给出证明），因而在〔1〕中定理3的条件下，$p=2$ 时，亦可得到上述结论。而$p\neq 2$时，上述定理及推论的条件永远不能在维数大于1的线性赋范空间中得到满足，因而它们是没有价值的。

如下给出证明，此处定义及符号与文献〔1〕同。

1．如下几种论述是等价的：

i）$x\perp_{L^p}y\Rightarrow x\perp_I y$；ii）$x\perp_I y\Rightarrow x\perp_{L^p}y$；iii）$\|x\|=\|y\|=1\Rightarrow\|x+y\|^p+\|x-y\|^p=2^p$；

iv）$\|x\|=\|y\|=1\Rightarrow x-y\perp_{L^p}x+y$；　v）$x\perp_{L^p}-y$；

证明

i）⇔ii）．这正是〔1〕的引理5．

iii）⇒ii）．若$x\perp_I y$，即$\|x+y\|=\|x-y\|=c$，由iii），$\left\|\frac{x+y}{c}+\frac{x-y}{c}\right\|^p+\left\|\frac{x+y}{c}-\frac{x-y}{c}\right\|^p=2^p$，亦即：$\|2x\|^p+\|2y\|^p=2^pc^p=2^p\|x+y\|^p$，所以$x\perp_{L^p}y$．

ii）⇒iii）．因若：$\|x\|=\|y\|=1$，就有$x+y\perp_I x-y$，所以，只要$\|x\|=\|y\|=1$，就有$x+y\perp_{L^p}x-y$，即：$\|x+y\|^p+\|x-y\|^p=\|(x+y)+(x-y)\|^p=\|2x\|^p$．所以ii）⇒iii）．

iii）⇔iv）显然。v）⇔i）显然。

总之，我们得到i）⇔ii）⇔iii）⇔iv）⇔v）．

2．　对任一维数大于1的线性赋范空间X，$p\neq 2$时，iii）不成立。

证明　$\forall x\in S$（X）（X的单位球面），$\exists y\in S$（X）使得$\|x+y\|=\|x-y\|$〔4〕，即$x\perp_I y$．若iii）真，由前面所证明的结论知，必有$x\perp_{L^p}y$，即$\|x+y\|^p=2$．另一方面：$\|x+y\|^p=$

* 1985年5月30日收到

$= \frac{1}{2}(\|x+y\|^p + \|x-y\|^p) = \frac{1}{2} \cdot 2^p = 2^{p-1} \neq 2$，矛盾说明iii）不成立。

由1中的几个等价命题知文献〔1〕中上述几个定理及推论的条件是等价的。因而$p \neq 2$时，对于2中的X，这些定理及推论的条件不能满足。

参 考 文 献

〔1〕Liu Zheng（刘证），L—orthogonality in Banach spaces，数学研究与评论，1（1984），31－35.

〔2〕James，R. C.，Orthogonality in normed linear spaces，Duke Math.J.，12（1945），291－302.

〔3〕Day，M. M.，Some characterizations of innerproduct spaces，Trans.Amer.Math.Soc.，62（1947），320－337.

〔4〕高继，Banach空间单位球的均匀度的极端值，南京大学学报，1（1983），5－12.