

《关于Köthe问题及幂零性问题》一文的注记*

蔡传仁 方洪锦

(扬州师范学院)

许永华在文〔1〕中引进了Köthe子集及R-左模同态链归纳条件,分别给出了环成立Köthe猜测及环的任一诣零单侧理想是幂零的充要条件.

陈维新在文〔2〕中指出,可把R-左模同态链是归纳的定义本身予以减弱,而保持结论不变.

本文用“R在一个Köthe子集上满足R-左模同态链归纳条件”来代替文〔1〕的定理中使用的“R在每一个Köthe子集上满足R-左模同态链归纳条件”,从而改进了文〔1〕的结果.本文所用的术语、符号与文〔1〕同.

引理1 设L是环R的一个诣零左理想, B是R的诣零理想, 则L + B是R的诣零左理想.

证 任取 $a \in L$, $b \in B$, 则存在正整数 n , 使 $a^n = 0$. 因B是R的理想, 故 $(a+b)^n = a^n + x = x$, 其中 $x \in B$. 设 $x^m = 0$, 则 $(a+b)^{nm} = x^m = 0$. 于是 $a+b$ 是幂零元, L + B是R的诣零左理想.

定理1 设R是一个环, 那末R成立Köthe猜测, 当且仅当R的诣零根 N' 是R的极大诣零左理想.

证 必要性 若R成立Köthe猜测, R的诣零根包含R的所有诣零左理想, 故 N' 是极大诣零左理想.

充分性 设L是R的任一诣零左理想. 根据引理1, L + N' 是R的诣零左理想, 且 $N' \subset L + N'$. 由 N' 的极大性得到 $L + N' = N'$, 从而 $L \subset N'$. R成立Köthe猜测.

现在我们将文〔1〕的主要结果定理1.2和定理2.2加以改进.

定理2 设R是一个环, 那末R成立Köthe猜测, 当且仅当R在一个Köthe子集上满足R-左模同态链归纳条件.

证 必要性 由文〔1〕定理1.2立即可得.

充分性 设L是R的一个极大诣零左理想, R在Köthe子集 $M = (L + LR + N') - N'$ 上满足R-左模同态链归纳条件. 根据文〔1〕定理1.1, $A = L + LR + N'$ 是诣零理想, 于是 $L + LRC \subset N'$, 从而 $L \subset N'$. 再由L的极大性得到 $L = N'$, N' 是R的极大诣零左理想. 根据定理1, R成立Köthe猜测.

由上述定理及文〔1〕定理1.2易知, 若R在一个Köthe子集上满足R-左模同态链归纳条件, 则R在每一个Köthe子集上满足R-左模同态链归纳条件. 于是可将文〔1〕的定理

* 1986年2月16日收到.

2.2改进为

定理 3 设 R 是一个环, N' 是诣零根, N 是 R 的所有幂零理想之和. 记 $M = N' - N$, 那末 R 的每个诣零单侧理想是幂零的, 当且仅当 R 满足 M 上及一个 Köthe 子集上 R 左模同态链归纳条件并且 N 是幂零的.

这里, 我们顺便指出两点:

1. 文 [1] 以及文 [2] 关于 R 左模同态链的定义, 要求“对 $\{Rx_i\}_{i \in I}$ 中任二元素, 或者存在 Rx_β 到 Rx_α 上的模同态映射 $\varphi_{\beta, \alpha}$, 使 $x_\beta \varphi_{\beta, \alpha} = x_\alpha$, 或者存在 Rx_α 到 Rx_β 上的模同态映射 $\varphi_{\alpha, \beta}$, 使 $x_\alpha \varphi_{\alpha, \beta} = x_\beta$.”是欠妥的. 因若环 R 无单位元, 则不能保证有 $x_\alpha \in Rx_\alpha$, $x_\beta \in Rx_\beta$.

为了使文 [1] 中有关结论成立, 需将上述要求修改为“对 $\{Rx_i\}_{i \in I}$ 中任二元素, 或者存在 Rx_β 到 Rx_α 上的模同态映射 $\varphi_{\beta, \alpha}: rx_\beta \rightarrow rx_\alpha, \forall r \in R$, 或者存在 Rx_α 到 Rx_β 上的模同态映射 $\varphi_{\alpha, \beta}: rx_\alpha \rightarrow rx_\beta, \forall r \in R$. 而其实质是“或有 ${}^\perp x_\beta \subseteq {}^\perp x_\alpha$, 或有 ${}^\perp x_\alpha \subseteq {}^\perp x_\beta$.”

2. 由文 [2] 知, 所谓 M 上 R -左模同态链归纳条件, 就是在集合 $A = \{{}^\perp x \mid x \in M\}$ 上, 任何升链在 A 中必有上界. 而这个条件在文 [1] 中的作用仅仅是由此应用 ZORN 引理, 得出 A 中有极大元. 因此, 我们认为就得出文 [1] 结论而言, 不妨用下面更弱的特殊左零化子极大元条件来代替 R 左模同态链归纳条件更为直接.

设 R 是一个环, M 是 R 的一个子集. 如果 M 中存在这样的元素 m , 使 ${}^\perp m$ 关于 M 为极大^[1], 或 $M = \emptyset$, 则称 R 满足 M 上特殊左零化子极大元条件.

参 考 文 献

[1] 许永华, 关于 Köthe 问题及幂零性问题, 中国科学 (A 辑), 3(1983), 195—201.

[2] 陈维新, 读《关于 Köthe 问题及幂零性问题》一得, 数学年刊, 6A: 5(1985), 573—574.

A note on the paper «On the Köthe problem and the nilpotent problem»

Cai Chuanren and Fang Honjin

(Yangzhou Teachers College)

Abstract

In the paper [1], Xu Yonghua has studied the necessary and sufficient condition for the Köthe conjecture to be affirmed, for every one side nil ideal to be nilpotent, respectively. In this paper, it is proved that “The chains of the homomorphic left R modules are inductive on one of the Köthe subsets” can be used instead of “The chains are inductive on every one of the Köthe subsets” in the paper [1], so Xu's results are improved.