1988年11月

数学研究与评论
第八卷 第四期

Fuzzy映象的重合度及重合定理*

张 石 生

（四川大学 成都）

本文的目的是引入Fuzzy映象的重合度的概念．借助于这一概念第一次建立了Fuzzy映象的某些重合定理，把引文〔2,3,4,5,8〕中的主要结果统一和推广到更一般的形式．另外我们在§2中，还给出著名的Kakutani-Ky Fan定理进一步的Fuzzy推广．这一结果改进和发展了引文〔1,6,7〕中的主要结果．另本文也改进了〔9—11〕中的结果．

一、Fuzzy映象的重合度

设X是一非空集，M是一拓扑空间，$\mathscr{F}$(M)表M上Fuzzy集全体的集合．映X到$\mathscr{F}$(M)的映象F称为X到$\mathscr{F}$(M)的Fuzzy映象．若F是X到$\mathscr{F}$(M)的Fuzzy映象，则对每一$x\in X$，$F(x)$(以下记为F_x)是$\mathscr{F}$(M)中的Fuzzy集，而$F_x(y)$表$y\in M$关于Fuzzy集F_x的隶属度．

由于通常集可视为Fuzzy集的特例，故通常X到2^M的集值映象可视为X到$\mathscr{F}$(M)的Fuzzy映象．显然X到$\mathscr{F}$(M)的Fuzzy映象F可由X×M到〔0, 1〕的二元函数$F(x,y)\stackrel{\text{def}}{=}F_x(y)$来确定．

定义1 设T是X→M的映象，F是X→$\mathscr{F}$(M)的Fuzzy映象，x是X中的任一点．我们称数$F_x(Tx)$为x关于T与F的重合度，记为$D_{\text{coin}}(x;T,F)$．一般来说，若$\{F_i\}_{i\in\sigma}$是一族X→$\mathscr{F}$(M)的Fuzzy映象．我们称数$(\bigcap_{i\in\sigma}F_{ix})(Tx)$为$x$关于$T$与$\{F_i\}_{i\in\sigma}$的重合度．记为$D_{\text{coin}}(x;T,\{F_i\}_{i\in\sigma})$．

特别当

$$D_{\text{coin}}(x;T,F)=\max_{u\in M}F_x(u)$$

$$(\text{或当}D_{\text{coin}}(x;T,\{F_i\}_{i\in\sigma})=\max_{u\in M}((\bigcap_{i\in\sigma}F_{ix})(u)))$$

时，则称T与F(或T与$\{F_i\}_{i\in\sigma}$)在x处有最大重合度，此时称x为T与F（或T与$\{F_i\}_{i\in\sigma}$）的重合点．

注1 Fuzzy映象的重合度概念是通常集值映象的重合点和不动点概念的推广．这由下面的例子即可得知．

例 设T是X→M的映象，G是X→2^M的集值映象．定义一Fuzzy映象F如下：

$$F:X\to\mathscr{F}(M),\quad x\mapsto\chi_{G(x)},$$

其中χ_E表集E上的特徵函数．故

* 1985年10月28日收到．

$$D_{\mathrm{coin}}(x;T,F)=\begin{cases}1, & \text{当}Tx\in G(x),\\ 0, & \text{当}Tx\notin G(x).\end{cases}$$

上式表明$D_{\mathrm{coin}}(x;T,F)=1$的充分必要条件是$Tx\in G(x)$（即$x$是$T$与G的通常的重合点）.特别当$X=M$，$T=I_M$（$M$上的单位映象），则$D_{\mathrm{coin}}(x;I_M,F)=1$的充分必要条件是$x\in G(x)$，即$x$是G的不动点.

另外Fuzzy映象的不动度的概念（见〔5,6〕）是Fuzzy映象重合度概念当$X=M$，$T=I_M$的特例.

定义2 设X是一拓扑空间，设M是一线性拓扑空间，设F是X到$\mathscr{F}$(M)的Fuzzy映象.F称为凸的，如果对每一$x\in X$，F_x是M上的Fuzzy凸集，即对任意的$y,z\in M$，$t\in[0,1]$，有

$$F_x(ty+(1-t)z)\geqslant\min\{F_x(y),F_x(z)\}.$$

F称为闭的，如果$F_x(y)=F(x,y)$作为$X\times M$上的二元函数是上半连续的.

定义3 设A是$\mathscr{F}$(M)中的Fuzzy集，$a\in(0,1]$.非模糊集

$$(A)_a=\{x\in M,\ A(x)\geqslant a\}$$

称为A的a-截集.

二、局部凸线性拓扑空间中Fuzzy映象的重合定理

定理1 设X是一非空集，M是一局部凸的Hausdorff实线性拓扑空间，设T是$X\to T(X)$的一对一的映象，且$T(X)$是M中的非空紧凸集.设$a(x)$是$X\to[r,1]$的映象，$r>0$.再设F是$X\to\mathscr{F}(T(X))$的Fuzzy映象，满足下面的条件：

（i）对每一$x\in X$，截集$(F_x)_{a(x)}=\{y\in T(X):\ F_x(y)\geqslant a(x)\}$是$T(X)$中的非空集；

（ii）设$\widetilde{F}$是$T(X)\to\mathscr{F}(T(X))$的凸闭Fuzzy映象，其中

$$\widetilde{F}_u(y)=\begin{cases}F_{T^{-1}u}(y), & \text{当}y\in(F_{T^{-1}u})_{a(T^{-1}u)},\\ 0, & \text{其他情形；}\end{cases}$$

（iii）$F_x(y)\leqslant a(x)$，$\forall x\in X$，$y\in T(X)$.

则存在$x_*\in X$，使得$D_{\mathrm{coin}}(x_*;T,F)=a(x_*)$.

证 定义多值映象P如下：

$$P:\ T(X)\to 2^{T(X)},\quad u\longmapsto(F_{T^{-1}u})_{a(T^{-1}u)}.$$

1°.首先证明对每一$u\in T(X)$，$P(u)$是$T(X)$中的非空紧凸集.

事实上，对每一$u\in T(X)$，由条件（i）$P(u)\neq\emptyset$.

另设$\{y_\beta\}_{\beta\in J}$是$P(u)$中的任一网，其收敛于$y_0\in T(X)$，则有$F_{T^{-1}u}(y_\beta)\geqslant a(T^{-1}u)$，$\forall\beta\in J$.又网$\{(T^{-1}u,y_\beta)\}_{\beta\in J}$收敛于$(T^{-1}u,y_0)$，故由$\widetilde{F}$的上半连续性知

$$F_{T^{-1}u}(y_0)\geqslant\widetilde{F}_u(y_0)\geqslant\limsup_{\beta\in J}\widetilde{F}_u(y_\beta)=\limsup_{\beta\in J}F_{T^{-1}u}(y_\beta)\geqslant a(T^{-1}u),$$

故$y_0\in P(u)$.即$P(u)$是$T(u)$中的闭集.

又设y_1,y_2是$P(u)$中任二元，$t\in(0,1)$，于是有

$$\widetilde{F}_u(ty_1+(1-t)y_2)\geqslant\min\{\widetilde{F}_u(y_1),\widetilde{F}_u(y_2)\}=\min\{F_{T^{-1}u}(y_1),F_{T^{-1}u}(y_2)\}$$
$$\geqslant\min\{a(T^{-1}u),a(T^{-1}u)\}=a(T^{-1}u)\geqslant r>0,$$

故$ty_1+(1-t)y_2\in(F_{T^{-1}u})_{a(T^{-1}u)}=P(u)$.

2°. 其次证明P的图象 Graph $P=\bigcup_{u\in T(X)}\{(u,y),\ y\in P(u)\}$是$M\times M$中的闭集．为此证明下之等式成立：

$$\operatorname{Graph}P=\Omega, \tag{2.1}$$

其中集合$\Omega=\{(u,y):\ \widetilde{F}_u(y)\geqslant r,\ u,y\in T(X)\}$．事实上，设$(u,y)\in\operatorname{Graph}P$，于是$u\in T(X)$，$y\in P(u)$，故有$F_{T^{-1}u}(y)\geqslant a(T^{-1}u)\geqslant r$．因而有$\widetilde{F}_u(y)=F_{T^{-1}u}(y)\geqslant r$．故$(u,y)\in\Omega$．

反之，设$(u,y)\in\Omega$，故$u\in T(X)$，且y必属于$(F_{T^{-1}u})_{a(T^{-1})}=P(u)$，故$(u,y)\in\operatorname{Graph}P$．故（2.1）式成立．

但由条件（ii），$\widetilde{F}$是上半连续的，故Ω是$M\times M$中的闭集．于是由Kakutani-Ky Fan定理（见〔7〕）存在$u_*\in T(X)$．使得$u_*\in P(u_*)$．于是存在$x_*\in X$，$Tx_*=u_*$，使得

$$Tx_*\in P(u_*)=(F_{T^{-1}u_*})_{a(T^{-1}u_*)}=(F_{x_*})_{a(x_*)},$$

即$F_{x_*}(Tx_*)\geqslant a(x_*)$．由条件(iii)，即得$F_{x_*}(Tx_*)=a(x_*)$．定理证毕．

由定理1可得下面的结果．

定理2 设X，M和T满足定理1中的条件．设F是$X\to\mathscr{F}(T(X))$的Fuzzy映象，满足下面的条件：

（i）对每一$x\in X$，集合$\Omega_1=\{y\in T(X),\ F_x(y)=\max_{u\in T(X)}F_x(u)\}\neq\emptyset$；

（ii）$\widetilde{F}$是$T(X)\to\mathscr{F}(T(X))$的凸、闭Fuzzy映象，其中

$$\widetilde{F}_u(y)=\begin{cases}F_{T^{-1}u}(y), & y\in\Omega_1,\\ 0, & \text{其余情形；}\end{cases}$$

（iii）$\inf_{x\in X}\max_{u\in T(X)}F_x(u)=r>0$．

则存在$x_*\in X$，它是T与F的重合点，即$D_{\text{coin}}(x_*;T,F)=\max_{u\in T(X)}F_{x_*}(u)$．

证 令$a(x)=\max_{u\in T(X)}F_x(u)$，则$a(x)$：$X\to[r,1]$，且$F_x(y)\leqslant a(x)$，$\forall x\in X$，$y\in T(X)$．由定理1存在$x_*\in X$，使得

$$D_{\text{coin}}(x_*;T,F)=a(x_*)\quad\max_{u\in T(X)}F_{x_*}(u).$$

故x_*是T与F的重合点．证毕

定理3 设X是一非空集，M是一局部凸的Hausdorff实线性拓扑空间．设T是$X\to T(X)\subset M$的一对一的映象，设P是$X\to 2^{T(X)}$的多值映象，且$T(X)$是M中的非空紧凸集．再设下面的条件成立：

（i）对每一$x\in X$，$P(x)$是$T(X)$中的非空闭凸集；

（ii）集合$\bigcup_{u\in T(X)}\{(u,y):\ y\in P(T^{-1}u)\}$是$M\times M$中的闭集．

则存在$x_*\in X$，它是通常的映象T和P的重合点，即$Tx_*\in P(x_*)$．

证 取$a(x)\equiv 1$，$x\in X$，并定义Fuzzy映象F如下：

$$F:\ X\to\mathscr{F}(T(X)),\quad x\longmapsto\chi_{P(x)}.$$

于是由条件（i）对每一$x\in X$，集$(F_x)_{a(x)}=P(x)$是$T(X)$中的非空闭凸集，故为$T(X)$中的紧凸集．其次，令

$$\widetilde{F}_u(y)=\begin{cases}\chi_{P(T_u^{-1})}(y), & \text{当} y\in P(T^{-1}u),\\ 0, & \text{其他情形;}\end{cases}$$

由条件（i），（ii）易知$\widetilde{F}$是$T(X)\to\mathscr{F}(T(X))$的凸闭Fuzzy映象．又显然有$F_x(y)\leqslant a(x)\equiv 1$，$\forall x\in X$，$y\in T(X)$．故定理1的条件全部被满足．于是由定理1知，存在$x_*\in X$，使得$D_{\text{coin}}(x_*;T,F)=1$，即$\chi_{P(x_*)}(Tx_*)=1$　故$Tx_*\in P(x_*)$．证毕．

注2　当$X=M$，$T=I_M$时，由定理3即得Kakutani-KyFan定理（见〔7〕）．

定理4　设X，M，T满足定理1中的条件，设$a(x)$是$X\to[0,1]$的映象，而且$a(T^{-1}u)$是$T(X)\to[0,1]$的下半连续函数．再设F是$X\to\mathscr{F}(T(X))$的Fuzzy映象，并满足下面的条件：

（i）对每一$x\in X$，$(F_x)_{a(x)}$是$T(X)$中的非空集；

（ii）$F_{T^{-1}(u)}(y)$是$T(X)\times T(X)$上的上半连续函数，而且对每一$u\in T(X)$，$F_{T^{-1}(u)}$是$T(X)$上的Fuzzy凸集；

（iii）$F_x(y)\leqslant a(x)$，$\forall x\in X$，$y\in T(X)$．

则存在$x_*\in X$，使得$D_{\text{coin}}(x_*;T,F)=a(x_*)$．

证　设有某一$x_*\in X$，使得$a(x_*)=0$，则有$F_{x_*}(Tx_*)\geqslant a(x_*)=0$，由条件（iii）知$D_{\text{coin}}(x_*;T,F)=a(x_*)$，结论得证．因此不妨设$a(x)>0$，$\forall x\in X$．因而对一切$u\in T(X)$，有$a(T^{-1}u)>0$．因$a(T^{-1}u)$是紧集$T(X)$上的下半连续函数，故存在$u_*\in T(X)$，使得$\inf\limits_{u\in T(X)}a(T^{-1}u)=a(T^{-1}u_*)=r>0$.于是$a$是$X\to[r,1]$的函数．

下面证明$\widetilde{F}$是$T(X)\to\mathscr{F}(T(X))$的Fuzzy凸闭映象，其中

$$\widetilde{F}_u(y)=\begin{cases}F_{T^{-1}u}(y), & \text{当} y\in(F_{T^{-1}u})_{a(T^{-1}u)}\\ 0, & \text{其他情形．}\end{cases}$$

先证$\widetilde{F}_u(y)$作为$T(X)\times T(X)$上的二元函数是上半连续的．事实上，对任一$a\in(0,1]$有

$$\begin{aligned}\{(u,y):\widetilde{F}_u(y)\geqslant a,\ u,y\in T(X)\}&=\{(u,y),F_{T^{-1}u}(y)\geqslant a,\ y\in(F_{T^{-1}u})_{a(T^{-1}u)}\}\\&=\{(u,y):F_{T^{-1}u}(y)\geqslant a\}\cap\{(u,y):F_{T^{-1}u}(y)\geqslant a(T^{-1}u)\}.\end{aligned}$$

由条件（ii），点集$\{(u,y):F_{T^{-1}u}(y)\geqslant a\}$是$T(X)\times T(X)$中的闭集．另因$a(T^{-1}u)$是$T(X)$上的下半连续函数，再由条件（ii）知$F_{T^{-1}u}(y)-a(T^{-1}u)$是$T(X)\times T(X)$上的上半连续函数，故集合

$$\{(u,y):F_{T^{-1}u}(y)\geqslant a(T^{-1}u)\}=\{(u,y):F_{T^{-1}u}(y)-a(T^{-1}u)\geqslant 0\}$$

是$T(X)\times T(X)$上的闭集，因此$\{(u,y):\widetilde{F}_u(y)\geqslant a,u,y\in T(X)\}$是$T(X)\times T(X)$中的闭集，即$\widetilde{F}$是$T(X)\to\mathscr{F}(T(X))$的闭的Fuzzy映象．

再证$\widetilde{F}$是$T(X)\to\mathscr{F}(T(X))$的凸的Fuzzy映象．事实上，对任一$u\in T(X)$，和任意的$y,z\in(F_{T^{-1}u})_{a(T^{-1}u)}$，$t\in(0,1)$，由条件（ii）有

$$F_{T^{-1}u}(ty+(1-t)z)\geqslant\min\{F_{T^{-1}u}(y),F_{T^{-1}u}(z)\}\geqslant a(T^{-1}u)\geqslant r>0.$$

故有$ty+(1-t)z\in(F_{T^{-1}u})_{a(T^{-1}u)}$．于是有

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_u(ty+(1-t)z)&=F_{T^{-1}u}(ty+(1-t)z)\geqslant\min\{F_{T^{-1}u}(y),F_{T^{-1}u}(z)\}\\&=\min\{\widetilde{F}_u(y),\widetilde{F}_u(z)\}.\end{aligned}$$

故$\widetilde{F}$是$T(X)\to\mathscr{F}(T(X))$的凸Fuzzy映象．于是定理4的结论由定理1得知．证毕．

三、度量空间上Fuzzy映象的重合定理

本节中我们处处假定X是一非空集，(M, d) 是一度量空间，CB(M) 表M中一切非空有界闭集族，而H表 CB(M) 上由度量d导出的 Hausdorff 度量．另外在本节我们还假定函数 $\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)$：$[0,\infty)^5\to[0,\infty)$ 满足条件 (Φ_1) 或 (Φ_2)：

(Φ_1) Φ 上半连续，对每一变量不减，且满足条件：

$$\max\{\Phi(t,t,t,at,bt),a,b=0,1,2,a+b=2\}\leqslant\varphi(t),\quad\forall t\geqslant 0,$$

其中φ：$[0,\infty)\to[0,\infty)$，$\varphi(0)=0$，$\varphi(t)<t$，$\forall t>0$.

(Φ_2) Φ 上半连续且对每一变量不减，且满足条件：

$$\max\{\Phi(t,t,t,at,bt),a,b=0,1,2,a+b=2\}\leqslant\gamma t,\ \forall t\geqslant 0,$$

这里$\gamma\in(0,1)$．

引理（Nadler [9]）．设A， $B\in CB(M)$．则对任一$\beta>1$，$a\in A$，必存在$b\in B$，使得

$$d(a,b)\leqslant\beta H(A,B).$$

以下设T是$X\to M$的映象，并假定$T(X)$是M中的完备子空间，再设F_1，F_2是$X\to\mathscr{F}(T(X))$ 的 Fuzzy 映象满足下面的条件：

（i）存在函数$\alpha(x)$，$\beta(x)$：$X\to(0,1]$，使得对任何$x\in X$，截集 $(F_{1x})_{\alpha(x)}\in CB(T(X))$，$(F_{2x})_{\beta(x)}\in CB(T(X))$．再设对每一$u\in T(X)$，和任意的$x$，$y\in T^{-1}u$

$$(F_{1x})_{\alpha(x)}=(F_{1y})_{\alpha(y)},\ (F_{2x})_{\beta(x)}=(F_{2y})_{\beta(y)}.\tag{3.1}$$

（ii）对任意的x，$y\in X$

$$H((F_{1x})_{\alpha(x)},\ (F_{2y})_{\beta(y)})\leqslant\Phi(d(Tx,Ty),d(Tx,\ (F_{1x})_{\alpha(x)}),$$
$$d(Ty,\ (F_{2y})_{\beta(y)}),d(Tx,\ (F_{2y})_{\beta(y)}),\ d(Ty,\ (F_{1x})_{\alpha(x)})),$$

其中函数Φ满足条件 (Φ_1) 或 (Φ_2)．

现定义多值映象P_1，P_2如下：

$$\left.\begin{aligned}P_1:&\ T(X)\to CB(T(X)),\ u\mapsto(F_{1T^{-1}u})_{\alpha(T^{-1}u)},\\P_2:&\ T(X)\to CB(T(X)),\ u\mapsto(F_{2T^{-1}u})_{\beta(T^{-1}u)},\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

其中

$$(F_{1T^{-1}u})_{\alpha(T^{-1}u)}=\bigcup_{x\in T^{-1}u}\{(F_{1x})_{\alpha(x)}\},\quad(F_{2T^{-1}u})_{\beta(T^{-1}u)}=\bigcup_{x\in T^{-1}u}\{(F_{2x})_{\beta(x)}\}.\tag{3.3}$$

由（3.1）知对任一$u\in T(X)$

$$(F_{1T^{-1}u})_{\alpha(T^{-1}u)}=(F_{1x})_{\alpha(x)},\ \forall x\in T^{-1}u\tag{3.4}$$

$$(F_{2T^{-1}u})_{\beta(T^{-1}u)}=(F_{2x})_{\beta(x)},\ \forall x\in T^{-1}u.\tag{3.5}$$

故P_1，P_2是完全有确定意义的．

于是我们有下面的结果

定理5　设T是$X\to M$的映象，$T(X)$是M中的完备子空间，F_1，F_2是$X\to\mathscr{F}(T(X))$ 的Fuzzy映象满足条件（i），（ii），其中Φ满足条件 (Φ_1)，和下面的条件（iii）：

（iii）设$\beta>1$，任取$u_0\in T(X)$，$u_1\in P_1(u_0)$，而$\{t_k\}$ 是由下式定义的实数列：

$$t_0=0,\ t_1>d(u_0,u_1),t_{k+1}=t_k+\varphi(\beta(t_k-t_{k-1})),\ k=1,2,\cdots\tag{3.6}$$

其中φ是条件 (Φ_1) 中出现的函数，并设 $t_k\to t_*<\infty$．

则存在$x_*\in X$，使得 $(F_{1x_*}\cap F_{2x_*})(Tx_*)\geqslant\min\{\alpha(x_*),\beta(x_*)\}$．

证 对任意的 $u,v\in T(X)$, 和任意的 $x\in T^{-1}u$, $y\in T^{-1}v$, 由条件（ii）和（3.4,）（3.5）有

$$H(P_1(u),P_2(v))=H((F_{1x})_{\alpha(x)}\ (F_{2y})_{\beta(y)})$$
$$\leqslant\Phi(d(u,v),d(u,P_1(u)),d(v,P_2(v)),d(u,P_2(v)),d(v,P_1(u))).$$

于是由〔3〕中定理1，存在 $u_*\in T(X)$，使得 $u_*\in P_1(u_*)\cap P_2(u_*)$．故对任一 $x_*\in T^{-1}u$．有 $$Tx_*=u_*\in P_1(Tx_*)\cap P_2(Tx_*)=(F_{1x_*})_{\alpha(x_*)}\cap(F_{2x_*})_{\beta(x_*)}.$$

故 $(F_{1x_*}\cap F_{2x_*})(Tx_*)=\mathrm{mix}\{F_{1x_*}(Tx_*),F_{2x_*}(Tx_*)\}\geqslant\mathrm{mix}\{\alpha(x_*),\beta(x_*)\}$．定理证毕．

定理6 设 T，F_1，F_2 满足前述的条件（i），（ii），其中函数 Φ 满足条件（Φ_2），则定理5的结论成立．

证 取 $t_0=0$，任取 $u_0\in T(X)$，$u_1\in P_1(u_0)$，$t_1>d(u_0,u_1)$，并定义非负实数列 $\{t_k\}$ 如下：

$$t_{k+1}=t_k+\gamma\cdot\beta(t_k-t_{k-1}),\quad k=1,2,\cdots,\tag{3.7}$$

其中 $\gamma\in(0,1)$ 是条件（Φ_2）中出现的常数，而 $\beta>1$，且 $\beta\cdot\gamma<1$．于是由（3.7）有 $t_{k+1}-t_k=\gamma\cdot\beta(t_k-t_{k-1})=\cdots=(\gamma\cdot\beta)^k t_1$，因而

$$\lim_{k\to\infty}t_k=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})=\frac{t_1}{1-\gamma\cdot\beta}<\infty,$$

故定理5中的条件（iii）满足，定理得证．

由定理6可得下面的推论：

推论1 设映象 T 和 Fuzzy 映象 F_1,F_2 满足前述的条件（i）和下面的条件（iv）：

（iv）对任意的 $x,y\in X$

$$H((F_{1x})_{\alpha(x)},\ (F_{2y})_{\beta(y)})\leqslant\gamma\cdot\max\{d(Tx,Ty),d(Tx,\ (F_{1x})_{\alpha(x)}),$$
$$d(Ty,\ (F_{2y})_{\beta(y)}),\frac{1}{2}[d(Tx,\ (F_{2y})_{\beta(y)})+d(Ty,\ (F_{1x})_{\alpha(x)})]\}.$$

其中 $\gamma\in(0,1)$．则定理6的结论成立．

证 取 $\Phi(t_1t_2,t_3,t_4,t_5)=\gamma\cdot\max\{t_1,t_2,t_3,\frac{1}{2}(t_4+t_5)\}$.

于是 $\Phi(t,t,t,at,bt)=\gamma\cdot t$，其中 $a,b=0,1,2$，且 $a+b=2$．故它满足条件（Φ_2）．因而由定理6即得推论1．证毕．

推论2 设 T 是 $X\to M$ 的映象，$T(X)$ 是M中的完备子空间，设 F 是 $X\to\mathscr{F}(T(X))$ 的 Fuzzy 映象，满足下面的条件：

（v）对任意的 $x,y\in X$，$H((F_x)_{\alpha(x)},\ (F_y)_{\alpha(y)})\leqslant\gamma\cdot d(Tx,Ty)$，其中 $\alpha(x)$ 是 $X\to[0,1]$ 的映象，$\gamma\in(0,1)$．

（vi）$F_x(y)\leqslant\alpha(x)$，$\forall x\in X$，$y\in T(X)$．

则存在 $x_*\in X$，使得 $D_{\mathrm{coin}}(x_*,T,F)=\alpha(x_*)$．

证 于推论1中取 $F=F_1=F_2$，于是由条件（v）得知条件（iv）满足．另由条件（v）对任意的 $u\in T(X)$ 和任意的 $x,y\in T^{-1}u$，有 $H((F_x)_{\alpha(x)},\ (F_y)_{\alpha(y)})\leqslant\gamma\cdot d(u,u)=0$.从而

$$(F_x)_{\alpha(x)}=(F_y)_{\alpha(y)},\quad\forall\ x,y\in T^{-1}u\ .$$

故前述的条件（i）成立．故由推论1，存在 $x_*\in X$ 使得 $F_x(Tx_*)\geqslant\alpha(x_*)$．于是由条件（vi）有 $D_{\mathrm{coin}}(x_*;T,F)=\alpha(x_*)$．推论证毕．

注3 定理5，定理6及推论1可以推广到 $\{F_i\}$ 是 $X\to\mathscr{F}(T(X))$ 的 Fuzzy 映象列的

情形．为节省篇幅，这里不再赘述．

注4　定理5、定理6及推论1把引文〔2、3、4、5、8〕中的主要结果作了统一和推广．即使推论2那样简单的结果也是新的，在通常的非Fuzzy映象的情形，推广了〔9、10、11〕中的结果．

参 考 文 献

〔1〕D.Butnariu, Fixed points for fuzzy mappings, Fuzzy Sets and Systems, 7(1982), 191—207.

〔2〕张石生，模糊映象的不动点定理，科学通报，29(1984)，14，833—836.

〔3〕Shih-sen Chang, Fixed point theorems (Ⅱ), Fuzzy Sets and Systems, 17, No.3(1985).

〔4〕张石生，Fuzzy映象的不动点定理，应用数学和力学，5(1984)，297—304.

〔5〕方锦暄，Fuzzy映象的不动度，科学通报，30，No.8(1985)，625.

〔6〕方锦暄，Kakutani-Ky Fan定理的Fuzzy推广，第一届全国不动点理论及应用学术讨论会论文资料，1985.

〔7〕Ky Fan, Fixed point and minimax theorem in locally convex topological linear spaces, Proc. Nat Acad. Sci. USA, 38(1952), 121—126.

〔8〕S.Heilpern, Fuzzy mappings and fixed point theorem, J.Math.Anal. Appl, 83(1981), 566—569.

〔9〕Jr.S.B.Nadler, Multi-valued contraction mappings, Pacific J.Math., 30(1969), 475—488.

〔10〕H. Covitz and S.B.Nadler, Jr., Multi-valued contraction mappings in generalized metric space, Israel J.Math., 8(1980), 5—11.

〔11〕K. Goebel, A coincidence theorem, Bull.Acad. Polon.Sci.Ser.Sci.Math., 16(1968), 733—735.