

广 义 函 数 的 乘 法*

程麟趾 李程宽

(华中农业大学, 武汉)

1950年, 法国数学家L. Schwartz成功地引入了广义函数概念: 具有紧支集的无穷次连续可微函数空间上的连续线性泛函. 但如何定义任意两个广义函数的乘积问题一直未能得到圆满解决. 从广义函数概念出发, 易于定义无穷次可微函数与任意广义函数的乘积:

定义1 设 g 是 C^∞ 函数, f 是任意广义函数, 则 gf 定义为:

$$(gf, \varphi) = (fg, \varphi) \triangleq (f, g\varphi) \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

1971年, B. Fisher 给出了如下定义[1]:

定义2 设 f, g 是开区间 (a, b) 上的广义函数, $F \in L^p(a, b)$, $g^{(r)} \in L^q(a, b)$, p, q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则在开区间 (a, b) 上乘积 fg 定义为:

$$fg = gf = \sum_{i=0}^r C_i (-1)^i [Fg^{(i)}]^{(r-i)},$$

其中 $C_i = \frac{r!}{i!(r-i)!}$, $f = F^{(r)}$, F 是局部可积的.

定义3 设 $\rho(x)$ 是一个固定的 C^∞ 函数, 满足下列条件:

- (i) $\rho(x) = 0$ 当 $|x| \geq 1$ (ii) $\rho(x) \geq 0$
(iii) $\rho(x) = \rho(-x)$ (iv) $\int_{-1}^1 \rho(x) dx = 1$

令 $\delta_n(x) = n\rho(nx)$, $f_n = f * \delta_n$, $g_n = g * \delta_n$, 其中 f, g 为 (a, b) 上的两个广义函数. 如果序列 $\{f_n g_n\}$ 是 (a, b) 上正则序列(定义见文献[2]), 则在 (a, b) 上, f 和 g 的乘积定义为:

$$(fg, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n g_n, \varphi) \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

1980年, B. Fisher 给出一种不可易的乘法定义(见文献[3]):

定义4 设 f, g 是任意两个广义函数, $g_n = g * \delta_n$. 如果极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (fg_n, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f, g_n \varphi)$

存在, $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$, 则称 f 和 g 在 (a, b) 上的乘积存在, 且 $(f \circ g, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f, g_n \varphi)$.

B. Fisher 在文献[1, 3]中, 研究了四种乘法定义之间的关系. 证明了: 定义3包含定义2, 定义4包含定义1, 2且与定义3相互独立. 另外, B. Fisher 断言: 定义3也包含定义1. 但我们未能见到其证明, 下面我们给出一种证明.

定理1 定义3包含定义1.

证明 设 g 是 C^∞ 函数, f 是任意广义函数, 令 $f_n = f * \delta_n$, $g_n = g * \delta_n$, 又设 $a(x)$ 是具有紧支集的 C^∞ 函数, 且 $a(x) = 1$. 当 $x \in \text{supp } \varphi(x)$. 显然有:

* 1986年7月10日收到, 陈庆益教授推荐.

$$(f_n g_n, \varphi) = (f_n, g_n \varphi) = (f_n, g_n \varphi a(x)) = (a(x) f_n, g_n \varphi)$$

而 $g_n \varphi$ 在 \mathcal{D} 中趋于 $g\varphi$, $a(x) f_n$ 作为 \mathcal{S}' 中的广义函数趋于 $a(x) f$. 由一个已知的定理 (见 [4]):

“ $\varphi_n \in \mathcal{S}, \lim_n \varphi_n \stackrel{\mathcal{S}}{=} \varphi$, 又 $T_n \in \mathcal{S}', \lim_n T_n \stackrel{\mathcal{S}'}{=} T$, 则 $\lim_n (T_n, \varphi_n) = (T, \varphi)$.” 可知: $\lim_n (f_n g_n, \varphi) =$

$$(a(x) f, g\varphi) = (f, g\varphi).$$

由于定义 4 是非对称的, 所以一般有 $f \circ g \neq g \circ f$.

受均值思想的启发, 我们给出一种满足可易性的广义函数乘法定义, 并且分析了它与 B. Fisher 的乘法定义之间的关系, 证明了此定义的广泛性, 并用此定义计算了乘积: $x^{-r} \cdot \delta^{(r-1)}(x)$, $\operatorname{sgn} x |x|^\lambda \cdot \delta^{(2r)}(x)$, $|x|^\lambda \cdot \delta^{(2r-1)}(x)$ 和 $x_+^{r-1/2} \cdot x_-^{r-1/2}$, 简化了 B. Fisher 的计算过程.

定义 5 设 f, g 是 (a, b) 上的两个广义函数, $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$. 令 $f_n = f * \delta_n, g_n = g * \delta_n$. 如果极限 $\lim_n \frac{1}{2} \{ (f, g_n \varphi) + (g, f_n \varphi) \}$ 存在, 则定义乘积 $f \cdot g$ 为:

$$(f \cdot g, \varphi) = \lim_n \frac{1}{2} \{ (f, g_n \varphi) + (g, f_n \varphi) \}$$

显然, $f \cdot g = g \cdot f$. 此外有:

定理 2 定义 5 包含定义 1 和定义 2.

证明 设 g 是 C^∞ 函数, f 是任意广义函数, 显然在 \mathcal{D} 中有: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $g_n \varphi \rightarrow g\varphi$, 故 $\lim_n (f, g_n \varphi) = (f, g\varphi)$. 另外, f_n 在 \mathcal{D}' 中(弱)收敛于 f , 故 $\lim_n (g, f_n \varphi) = \lim_n (f_n, g\varphi) = (f, g\varphi)$.

按定义 5 有:

$$(f \cdot g, \varphi) = \lim_n \frac{1}{2} \{ (f, g_n \varphi) + (g, f_n \varphi) \} = (f, g\varphi).$$

即定义 5 包含定义 1.

由 [3] 中定理 2 可推知: 定义 5 也包含定义 2.

定理 3 若 $f \cdot g, f \cdot g'$ 存在, 则 $f' \cdot g$ 也存在, 并且有: $(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$.

定理 4 定义 5 和定义 1 是相互独立的.

我们列举两例来证明定理 4. [3] 已指出: 当 $r \geq 1$ 且为正整数时, 定义 4 不能定义 x^{-r} 和 $\delta^{(r-1)}(x)$ 相乘 ($r=2, 3, \dots$). 但用定义 5 不难算出 $x^{-r} \cdot \delta^{(r-1)}(x) = (-1)^r (r-1)! / 2(2r-1)! \cdot \delta^{(2r-1)}(x)$. 此结果与 B. Fisher 按定义 3 计算所得结论相同 (见 [5]).

反过来, 按定义 1 有 $\delta \circ x^{-2r-1} = 0$ ($r=1, 2, \dots$). 不难证明按定义 5 无法确定 $\delta \cdot x^{-2r-1}$ ($r=1, 2, \dots$), 因为按定义 5 乘积 $\delta \cdot x^{-2r-1}$ 是发散的.

定义 5 和定义 3 不是等价的. 例如在子空间 $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}) = \{ \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \varphi(0) = 0 \}$ 上考察乘积 $\delta'(x) \cdot \delta'(x)$. 按定义 5: $\delta'(x) \cdot \delta'(x) = 0$. 而定义 3 无法定义 $\delta'(x)$ 和 $\delta'(x)$ 相乘.

下面我们用定义 5 来计算两个特殊的广义函数乘积, 比较文献 [2, 6] 计算过程较为简捷.

定理 5 $|x|^\lambda \cdot \delta^{(2r-1)}(x) = 0$ 当 $\lambda < 2r, r=0, 1, 2, \dots$.

证明 $(|x|^\lambda \cdot \delta_n^{(2r-1)}, \varphi(x)) = \int_0^1 x^\lambda \delta_n^{(2r-1)}(x) [\varphi(x) - \varphi(-x)] dx$.

由泰勒公式: $\varphi(x) - \varphi(-x) = 2\varphi'(0)x + \frac{\varphi'''(\theta x) + \varphi'''(-\theta x)}{3!} x^3$ 上式化为:

$$(|x|^\lambda \delta_n^{(2r+1)}(x), \varphi(x) = 2\varphi'(0) \int_0^1 x^{\lambda+1} \delta_n^{(2r+1)}(x) dx + \int_0^1 x^{\lambda+3} \frac{\varphi'''(\theta x) + \varphi'''(-\theta x)}{3!} \cdot \delta_n^{(2r-1)}(x) dx,$$

$$\text{而 } I = \int_0^{1/n} x^{\lambda+1} \delta_n^{(2r+1)}(x) dx = \int_0^1 x^{\lambda-1} n^{2r+2} \rho^{(2r-1)}(nx) dx.$$

$$\text{令 } s = nx, \text{ 则 } I = \frac{1}{n^{\lambda-2r}} \int_0^1 s^{\lambda-1} \rho^{(2r-1)}(s) ds > 0 \text{ 当 } n \rightarrow \infty.$$

$$\text{同理: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^{\lambda+3} \frac{\varphi'''(\theta x) + \varphi'''(-\theta x)}{3!} \delta_n^{(2r+1)}(x) dx = 0, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} (|x|^\lambda \delta_n^{(2r+1)}(x), \varphi(x)) = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{而 } (\delta^{(2r+1)}(x), (|x|^\lambda * \delta_n) \varphi(x)) &= - \sum_{i=0}^{2r+1} \frac{(2r+1)!}{i!(2r+1-i)!} (|x|^\lambda * \delta_n^{(i)}) \varphi^{(2r+1-i)}(x) \Big|_{x=0} \\ &= - \sum_{i=0}^{2r+1} \frac{(2r+1)!}{i!(2r+1-i)!} \int_{-1/n}^1 |t|^\lambda \delta_n^{(i)}(t) dt \varphi^{(2r+1-i)}(0). \end{aligned}$$

$$\text{仿照上面可证: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/n}^1 |t|^\lambda \delta_n^{(i)}(t) dt = 0, 0 \leq i \leq 2r+1. \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\delta^{(2r+1)}(x), (|x|^\lambda * \delta_n) \cdot$$

$\varphi(x)) = 0$

由定义 5 可知: $|x|^\lambda \cdot \delta^{(2r+1)}(x) = 0$, 当 $\lambda < 2r$, $r = 0, 1, 2, \dots$. 类似地有:

定理 6 $(\text{sgn} x |x|^\lambda) \cdot \delta^{(2r)}(x) = 0$, 当 $\lambda < 2r - 1$, $r = 0, 1, 2, \dots$.

定理 7 $x_+^{-r-1/2} \cdot x_-^{-r-1/2} = \frac{(-1)^r \pi}{2(2r)!} \delta^{(2r)}(x)$, $r = 0, 1, 2, \dots$.

为了证明定理 7, 我们运用了下列组合恒等式(证明吸取了[7]中的技巧. 为了不使文章篇幅太长, 证明从略).

$$\sum_{j=0}^r \frac{r!}{j!(r-j)!} (-1)^j B(r+j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = B(r+\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2}).$$

定理 7 的证明 $x_-^{-r-1/2} = c_1 \frac{d^r}{dx^r} x_-^{-1/2}$. 其中 $c_1 = \frac{2^r}{1 \cdot 3 \cdots (2r-1)}$, $x_+^{-r-1/2} = c_2 \frac{d^r}{dx^r} x_+^{-1/2}$,

$$\text{其中 } c_2 = (-1)^r c_1, x_-^{-r-1/2} * \delta_n = c_1 x_-^{-1/2} * \delta_n^{(r)} = c_1 \int_x^1 (t-x)^{-1/2} \delta_n^{(r)}(t) dt,$$

$$x_+^{-r-1/2} * \delta_n = c_2 x_+^{-1/2} * \delta_n^{(r)} = c_2 \int_{-1/n}^x (x-t)^{-1/2} \delta_n^{(r)}(t) dt.$$

按定义 5, 我们需要计算: $I_1 = \frac{1}{2} \{ (x_+^{-r-1/2}, (x_-^{-r-1/2} * \delta_n) \varphi(x)) + (x_-^{-r-1/2}, (x_+^{-r-1/2} * \delta_n) \cdot \varphi(x)) \}$ 的值:

$$\begin{aligned} (x_+^{-r-1/2}, (x_-^{-r-1/2} * \delta_n) \varphi(x)) &= c_1 c_2 (-1)^r \sum_{j=0}^r \frac{r!}{j!(r-j)!} \int_0^1 x^{-1/2} \int_x^1 \\ &(t-x)^{-1/2} \delta_n^{(r+j)}(t) dt \varphi^{(r-j)}(x) dx = c_1 c_2 (-1)^r \sum_{j=0}^r \frac{r!}{j!(r-j)!} \int_0^1 \delta_n^{(r+j)}(t) dt \int_0^x \\ &x^{-1/2} (t-x)^{-1/2} \varphi^{(r-j)}(x) dx, \end{aligned}$$

$$(x_-^{-r-1/2}, (x_+^{-r-1/2} * \delta_n) \varphi(x)) = c_1 c_2 (-1)^r \sum_{j=0}^r \frac{r!}{j!(r-j)!} \int_0^1 \delta_n^{(r+j)}(t) dt \int_0^t$$

$$x^{-1/2}(t-x)^{-1/2}(-1)^{r+j}\varphi^{(r-j)}(-x)dx,$$

$$I_1 = \frac{1}{2}c_1c_2(-1)^r \sum_{j=0}^r \frac{r!}{j!(r-j)!} \int_0^{1/n} \delta_n^{(r+j)}(t) dt \int_0^t x^{-1/2}(t-x)^{-1/2} [\varphi^{(r-j)}(x) + (-1)^{r+j}\varphi^{(r-j)}(-x)] dx.$$

由泰勒展式可知: $\varphi^{(r-j)}(x) + (-1)^{r+j}\varphi^{(r-j)}(-x) = \sum_{i=0}^{j+r} \frac{1}{i!} [\varphi^{(r-j+i)}(0) + (-1)^{r+j+i}\varphi^{(r-j+i)}(0)] x^i + \frac{1}{(j+r+1)!} [\varphi^{(2r+1)}(\xi x) - \varphi^{(2r+1)}(-\xi x)] x^{j+r+1}.$

不难看出:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_1c_2(-1)^r \frac{1}{2} \sum_{j=0}^r \frac{r!}{j!(r-j)!} \int_0^{1/n} \delta_n^{(r+j)}(t) dt \int_0^t x^{-1/2}(t-x)^{-1/2} \frac{1}{(j+r+1)!} [\varphi^{(2r+1)}(\xi x) - \varphi^{(2r+1)}(-\xi x)] x^{j+r+1} dx = 0,$$

和 $c_1c_2(-1)^r \frac{1}{2} \sum_{j=0}^r \frac{r!}{j!(r-j)!} \int_0^{1/n} \delta_n^{(r+j)}(t) dt \int_0^t x^{-1/2}(t-x)^{-1/2} \sum_{i=0}^{j+r} [\varphi^{(r-j+i)}(0) + (-1)^{r+j+i}\varphi^{(r-j+i)}(0)] \frac{1}{i!} x^i dx = 0,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_1c_2(-1)^r \frac{1}{2} \sum_{j=0}^r \frac{r!}{j!(r-j)!} \int_0^{1/n} \delta_n^{(r+j)}(t) dt \int_0^t x^{-1/2}(t-x)^{-1/2} \frac{2\varphi^{(2r)}(0)}{(j+r)!} x^{j+r} dx.$$

由分部积分得

$$\int_0^{1/n} \delta_n^{(r+j)}(t) dt \int_0^t x^{-1/2}(t-x)^{-1/2} \frac{2\varphi^{(2r)}(0)}{(j+r)!} x^{j+r} dx = \frac{2\varphi^{(2r)}(0)}{(j+r)!} \int_0^{1/n} \delta_n^{(r+j)}(t) t^{j+r} dt B\left(r+j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (-1)^{r+j} B\left(r+j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \varphi^{(2r)}(0)$$

将上式代入上式, 并利用组合恒等式即得:

$$x_+^{-r-1/2} \cdot x_-^{-r-1/2} = c_1c_2(-1)^r \frac{1}{2} \sum_{j=0}^r \frac{r!}{j!(r-j)!} (-1)^{r+j} B\left(r+j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \varphi^{(2r)}(0) = \frac{(-1)^r \pi}{2(2r)!} \delta^{(2r)}(x).$$

感谢陈庆益教授对本文的热情关注.

参 考 文 献

- [1] B. Fisher, Quart. J. Math. Oxford, 22 no.2 (1971), 291—298.
- [2] B. Fisher, Proc. Camb. Phil. Soc., 71(1972), 123—130.
- [3] B. Fisher, Math. Nachr., 99(1980), 239—249.
- [4] 李邦河, 中国科学, No.1 (1978), 1—10.
- [5] B. Fisher, Proc. Camb. Phil. Soc., 72(1972), 201—204.
- [6] B. Fisher, Proc. Camb. Phil. Soc., 73(1973), 317—325.
- [7] 徐利治、王兴华, 数学分析的方法及例题选讲(修订版), 1984年2月出版.