多重 Fourier 级数的一类球形线性平均的饱和问题*

蒋　迅

（北京师范大学）

§1　记号及一般定理

记$Q=\{x\in R^k: -\pi< x_j\leqslant\pi,\ j=1,2,\cdots,k\}$．用$C(Q)$、$L^p(Q)$ $(1\leqslant p<\infty)$和$L^\infty(Q)$分别表示每个变元都以2π为周期的连续函数、p次幂可积函数和本性有界函数全体所成的Banach空间．范数按通常意义记为$\|\cdot\|_C$，$\|\cdot\|_p$和$\|\cdot\|_\infty$．再记$X_p=L^p(Q)$（当$1\leqslant p<\infty$时），$X_p=C(Q)$（当$p=\infty$时）．我们还需引入一个集合BV(Q)．是Q上全变差有限的测度全体．当$k=1$时，它可以看作$[-\pi,\pi]$上有界变差函数的全体．

现在设$f\in L^1(Q)$．f的Fourier级数为

$$f(x)\sim\sum_m a_m(f)e^{imx}. \tag{1}$$

其球形线性平均指的是

$$T_\xi(f;x)\triangleq\sum_{m\in Z^k}\lambda_\xi(m)a_m(f)e^{imx}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j-1\leq|m|<j}\lambda_\xi(m)a_m(f)e^{imx}. \tag{2}$$

特别地，在本文中我们主要研究的是形如

$$T_R(f;x)\triangleq\sum_{|m|<R}\lambda_R(|m|)a_m(f)e^{imx}\qquad(R>0) \tag{3}$$

的Fourier级数球形部分和的线性平均．我们将给出一个判断（3）为饱和的方法并刻划其饱和类的特征，在第二节中对一些具体的算子进行一些讨论．所得结果是一维情形的推广．

为完整起见．我们先引入饱和的概念．

定义　设$\{T_\xi\}$的指标集有一个聚点ξ_0（实数或无穷大）．我们称$\{T_\xi\}$在X_p中饱和．如果它满足以下两个条件：

（Ⅰ）　对$f\in X_p$，由$\|f-T_\xi(f)\|=o(\varphi(\xi))$ $(\xi\to\xi_0)$可以推出$f(x)\equiv\text{const}$；

（Ⅱ）　存在$f_0\in X_p$使得$\|f_0-T_\xi(f_0)\|=o(\varphi(\xi))$ $(\xi\to\xi_0)$．

其中$\|\cdot\|$是相应于空间X_p的范数．$\varphi(\xi)$是一个正函数，当$\xi\to\xi_0$时收敛到零．这时把$\varphi(\xi)$称为$\{T_\xi\}$的饱和度，把满足（Ⅱ）的函数f的全体的集合称为饱和类，并记作$F(T,X_p)$．

定理1　设$\{T_R\}$满足

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1-{}_R(m)}{\varphi(R)}=\psi(m)\neq0\qquad(m\in Z^k\setminus\{0\}), \tag{4}$$

* 1985年4月18日收到．

则$\{T_R\}$在X_p中饱和，饱和度为$\varphi(R)$．若对任意的$f\in X_p$还有

$$\|f-T_R(f)\|\to 0\quad(R\to\infty), \tag{5}$$

则饱和类$F(T,X_p)$中的函数f具有如下的性质：

(i) $$\Big\|\sum_{|m|<R}\lambda_R(m)\psi(m)a_m(f)e^{imx}\Big\|=O(1)\quad(R\to\infty)$$

(ii) $f\in V(X_p,\psi(m))$，其中

$$V(X_p,\psi(m))\triangleq\begin{cases}\{f\in C(Q):\exists g\in L^\infty(Q),\psi(m)a_m(f)=a_m(g)\}, & p=\infty\text{时},\\ \{f\in L^p(Q):\exists g\in L^p(Q),\psi(m)a_m(f)=a_m(g)\} & 1<p<\infty\text{时},\\ \{f\in L^1(Q):\exists d\mu\in BV(Q),\psi(m)a_m(f)=a_m(d\mu)\}, & p=1\text{时},\end{cases}$$

证　我们只对$p=\infty$给出证明，设$f\in X_p$使得$\|f-T_R(f)\|=O(\varphi(R))$．则对任意固定的$m\in Z^k\setminus\{0\}$，有

$$a_m(f)(1-\lambda_R(m))=(2\pi)^k\int_Q[f(x)-T_R(f;x)]e^{-imx}dx=o(\varphi(R)).$$

再由(4)可知$a_m(f)=0$，所以$f(x)$恒为常数．另一方面，取$f_0(x)=e^{ix}$，$e_1=(1,0,\cdots,0)$，则显然有

$$\|f-T_R(f)\|=|1-\lambda_R(e_1)|=o(\varphi(R))\quad(R\to\infty).$$

于是$\{T_R\}$是饱和的，饱和度为$\varphi(R)$．

下面考虑定理的后一部分结论．由(5)知$\{\|T_R\|\}$是有界的．现在任取$f(x)\in F(T,X_p)$有$\|f-T_R(f)\|=O(\varphi(R))$．于是对$R>0$及$R'\in(0,R)$一致地有

$$\Big\|\sum_{|m|<R'}\lambda_{R'}(m)[1-\lambda_R(m)]a_m(f)e^{imx}\Big\|=O(\varphi(R)).$$

等价地有

$$\Big\|\sum_{|m|<R'}\lambda_{R'}(m)\frac{1-\lambda_R(m)}{\varphi(R)}a_m(f)e^{imx}\Big\|=O(1).$$

在上式中令$R\to\infty$并注意(4)式就有

$$\Big\|\sum_{|m|<R'}\lambda_{R'}(m)\psi(m)a_m(f)e^{imx}\Big\|=O(1).$$

由R'的任意性知(i)成立．现在我们来由(i)证明(ii)．记

$$F_R(x)\triangleq\sum_{|m|<R}\lambda_R(m)\psi(m)a_m(f)e^{imx},$$

根据(i)，$\|F_R\|_\infty\le C$，由$L^\infty(Q)$的$*w$紧性，存在函数$g(x)\in L^\infty(Q)$及序列$\{R_j\}$，$\lim\limits_{j\to\infty}R_j=\infty$，使

$$\lim_{j\to\infty}\int_Q(2\pi)^{-k}F_{R_j}(x)e^{-imx}dx=(2\pi)^{-k}\int_Q g(x)e^{-imx}dx$$

即

$$\lim_{j\to\infty}\lambda_{R_j}(m)\psi(m)a_m(f)=a_m(g).$$

但由(5)可知$\lim\limits_{R\to\infty}\lambda_R(m)=1$，所以$\psi(m)a_m(f)=a_m(g)$，$f\in V(C(Q),\psi(m))$．定理1证毕．

在研究饱和类时，我们需对φ作一些限制．先定义Abel-Cartwright平均和广义Riesz平均分别为

$$W_R^l(f;x) \triangleq \sum_m e^{-|m|^l/R^l} a_m(f) e^{imx} \quad (R>0,\ l>0) \tag{6}$$

和

$$ {}^lS_R^\alpha(f;x) \triangleq \sum_{|m|<R} \left(1-\frac{|m|^l}{R^l}\right)^\alpha a_m(f) e^{imx} \quad (R>0,\ l>0) \tag{7}$$

特别当$l=2$时，${}^lS_R^\alpha$就是通常的Bochner-Riesz平均，简记作S_R^α. 容易利用定理1证明$\{{}^lS_R^\alpha\}$在X_p中是饱和的，用类似的方法可证明$\{W_R^l\}$在X_p中与是饱和的. 饱和度均为R^{-l}. 记饱和类分别为$F({}^lS^\alpha, X_p)$和$F(W^l, X_p)$. 另外我们再给出一个形式的记号

$$f^{[l]} \sim \sum_m a_m(f)\, |m|^l e^{imx} .$$

我们先来刻划$F(W^l, X_p)$和$F({}^lS^\alpha, X_p)$.

引理1[注] 关于Abel-Cartwright平均$\{W_R^l\}$，以下三个命题是等价的:

（A） $f\in F(W^l, X_p)$，即$\|W_R^l(f)-f\| = O(R^{-l})$，

（B） $\|W_R^l(f^{[l]})\| = O(1)$， （C） $f\in V(X_p,\ |m|^l)$.

证 （A）⇒（B）和（B）⇒（C）都可仿照定理1的证明来完成. 现在我们来证明（C）⇒（A）. 仍然只考虑$p=\infty$的情形. 于是由（C）知存在$g\in L^\infty(Q)$满足$|m|^l a_m(f) = a_m(g)$. 在每个格点m上对$f-W_R^l(f)$作有限Fourier变换:

$$\begin{aligned}(f(\cdot)-W_R^l(f;\cdot))^\wedge(m) &= (1-e^{-|m/R|^l})a_m(f)\\ &= \int_0^{R^{-l}} e^{-\tau|m|^l}\mathrm{d}\tau\, a_m(f)\,|m|^l = \int_0^{R^{-l}} e^{-\tau|m|^l}\mathrm{d}\tau\cdot a_m(g) = \left(\int_0^{R^{-l}} W^l_{\tau^{-1/l}}(g;\cdot)\mathrm{d}\tau\right)^\wedge(m).\end{aligned}$$

由唯一性定理即知

$$f(x)-W_R^l(f;x) = \int_0^{R^{-l}} W^l_{\tau^{-1/l}}(g;x)\,\mathrm{d}\tau .$$

由于$g\in L^\infty(Q)$，有$\|W^l_{\tau^{-1/l}}(g)\|_\infty = O(1)\ (\tau>0)$. 从而$\|f-W_R^l(f)\| = O(R^{-l})$即$f\in F(W^l, X_\infty)$. 引理1证毕.

引理2[7] 设$\alpha>(m-1)|1/p-1/2|$，$1\le p\le\infty$，则Abel-Cartwright平均$\{W_R^l\}$与广义Riesz平均$\{{}^lS_R^\alpha\}$在下述意义下等价

$$\|W_R^l(f)-f\| \asymp \|{}^lS_R^\alpha(f)-f\| \quad (f\in X_p).$$

引理3 设$\alpha>(m-1)\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|$，$1\le p\le\infty$. 则关于广义Riesz平均$\{{}^lS_R^\alpha\}$，以下三个命题等价:

（A′） $f\in F({}^lS^\alpha, X_p)$，即$\|{}^lS_R^\alpha(f)-f\| = O(R^{-l})$，

（B′） $\|{}^lS_R^\alpha(f^{[l]})\| = O(1)$， （C′） $f\in V(X_p,\ |m|^l)$.

引理3易由引理1和2得出.

定理2 设算子族$\{T_R\}$满足如下条件

$$\lim_{R\to\infty}\|T_R(f)-f\| = 0 \quad (f\in X_p), \tag{8}$$

注：参见[8]，那里给出了$F(W^l, X_p)$的另一种特征性质.

$$\lim_{R\to\infty} R^l(1-\lambda_R(m)) = a|m|^l \quad (a \neq 0), \tag{9}$$

$$\Big\| \sum_{0<|m|<R} [1-\lambda_R(m)] \frac{R^l}{|m|^l}\Big(1-\frac{|m|^l}{R^l}\Big)^k a_m(g) e_i^{\lambda mx} \Big\|_p \leqslant A_p \|g\|_p \tag{10}$$

则 $\{T_R\}$ 的饱和度为 R^{-l}，饱和类 $F(T, X_p) = V(X_p, |m|^l)$.

证 由定理 1，我们只需证明 $V(X_p, |m|^l) \subset F(T, X_p)$. 任取 $f \in V(X_p, |m|^l)$，不妨设 $p=\infty$，于是存在 $g \in L^\infty(Q)$ 使 $|m|^l a_m(f) = a_m(g)$. 据引理 3，$\|{}^lS_R^k(f) - f\| = O(R^{-l})$. 现作如下的分解：

$$f - T_R(f) = f - {}^lS_R^k(f) + {}^lS_R^k(f) - T_R({}^lS_R^k(f)) + T_R({}^lS_R^k(T)) - T_R(f) = I_1 + I_2 + I_3.$$

显然有 $I_1 = O(R^{-l})$，$I_3 = O(\|{}^lS_R^k(f) - f\|) = O(R^{-l})$. 这里用到了 $\{T_R\}$ 的算子范数的一致有界性. 又

$$I_2 = \sum_{0<|m|<R} [1-\lambda_R(m)]\Big(1-\frac{|m|^l}{R^l}\Big)^k a_m(f) e^{imx}$$

$$= R^{-l} \sum_{0<|m|<R} [1-\lambda_R(m)] \frac{R^l}{|m|^l}\Big(1-\frac{|m|^l}{R^l}\Big)^k a_m(g) e^{imx}$$

所以由 (10) 得出 $I_2 = O(R^{-l})$. 于是 $\|f - T_R(f)\| = O(R^{-l})$. 定理 2 证毕.

§2 关于 (C, 1) 平均和广义 Riesz 平均的饱和问题

作为定理 1 和 2 的应用，我们先来考虑 (C, 1) 平均 $\sigma_R(f)$ 的饱和性质. 这里 (C, 1) 平均是如下定义的：

$$\sigma_R(f; x) \triangleq \frac{1}{R}\int_0^R S_r^{(k-1)/2}(f; x)\,dx \quad (R > 0).$$

在 [4] 中我们证明了对一切 $f \in X_p$ 有 $\lim_{R\to\infty} \|\sigma_R(f) - f\| = 0$. 我们来验证 (9) 和 (10) 成立 ($l=1$) 注意到

$$\sigma_R(f; x) = a_0(f) + \sum_{0<|m|<R} \frac{1}{R}\int_{|m|}^R \Big(1-\frac{|m|^2}{r^2}\Big)^{(k-1)/2} dr\, a_m(f) e^{imx},$$

于是

$$\lambda_R(m) = \begin{cases} 1 & m = 0 . \\ \dfrac{1}{R}\displaystyle\int_{|m|}^R \Big(1-\frac{|m|^2}{r^2}\Big)^{(k-1)/2} dr & 0 < |m| < R . \end{cases}$$

对 $m \in Z^k \setminus \{\cdot\}$，易证有 $\lim_{R\to\infty} R[1-\lambda_R(m)] = |m| k \int_0^{\pi/2} \sin^k\theta\, d\theta$. 于是 (9) 成立. 现在取函数

$$\varphi(\rho) \triangleq \begin{cases} \Big[1-\rho\displaystyle\int_\rho^1 (1-t^2)^{(k-1)/2} t^{-2} dt\Big]\rho^{-1}(1-\rho)^k & (0<\rho<1), \\ 0 & (\rho \geqslant 1 \text{ 或 } \rho = 0). \end{cases}$$

则 (10) 式取如下的形式

$$\Big\| \sum_m \varphi\Big(\Big|\frac{m}{R}\Big|\Big) a_m(g) e^{imx} \Big\|_p \leqslant A_p \|g\|_p. \tag{11}$$

我们只对 $p=\infty$ 的情形来证明 (11) 式成立. 如果存在函数 $\Phi \in L(R^k)$ 使得

$$\varphi(|x|) = \mathscr{F}(\Phi)(x) \triangleq (2\pi)^{-k}\int_{R^k} \Phi(y) e^{-ixy} dy,$$

那么由Poisson求和公式[5]及函数g的周期性可知

$$\sum_m \varphi(|\frac{m}{R}|)a_m(g)e^{imx}=\sum_m \varphi(\eta|m|)a_m(g)e^{imx} \quad (\eta=R^{-1})$$

$$=(2\pi)^{-k}\int_Q g(x-y)\sum_m \varphi(\eta|m|)e^{imy}\mathrm{d}y=(2\pi)^{-k}\eta^{-k}\int_Q g(x-y)\sum_m \Phi(\frac{y+2\pi m}{\eta})\mathrm{d}y$$

$$=(2\pi)^{-k}\eta^{-k}\int_{R^k} g(x-y)\Phi(\frac{y}{\eta})\mathrm{d}y=(2\pi)^{-k}\int_{R^k} g(x-\eta y)\Phi(y)\mathrm{d}y,$$

由此便知(11)成立($p=\infty$).

我们证明这样的Φ是存在的．因$\varphi(|x|)\in L^2(R^k)$，故存在$\Phi\in L^2(R^k)$使$\varphi(|x|)=\mathscr{F}(\Phi)(x)$．注意$\varphi(|x|)$是一个偶函数，因而$\varphi=\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}(\varphi)=(2\pi)^k\mathscr{F}\mathscr{F}(\varphi)$，遂有$\Phi=(2\pi)^k\mathscr{F}(\varphi)$．又由于$\varphi(|x|)\in L^1(R^k)$且为放射函数，所以有[5]

$$\mathscr{F}(\varphi)(y)=(2\pi)^{-k}|y|^{(-k-2)/2}\int_0^\infty \varphi(t)t^{k/2}J_{(k-2)/2}(|y|t)\mathrm{d}t$$

$$=(2\pi)^{-k}|y|^{(-k-2)/2}\int_0^1 \varphi(t)t^{k/2}J_{(k-2)/2}(|y|t)\mathrm{d}t.$$

显然为证$\Phi\in L^1(R^k)$，我们只需证明存在常数$\delta>0$，使得

$$u^{(-k-2)/2}\int_0^1 \varphi(t)t^{k/2}J_{(k-2)/2}(ut)\mathrm{d}t=O(u^{-k-\delta}) \quad (u\geqslant 1) \tag{12}$$

这只要通过若干次分部积分就可以看出，为简单起见，我们只对$k=2$的情形加以证明．这时(12)的左边变为

$$\int_0^1 \varphi(t)tJ_0(ut)\mathrm{d}t=u^{-2}\int_0^u \Phi(\frac{t}{u})tJ_0(t)\mathrm{d}t$$

$$=u^{-2}\Phi(\frac{t}{u})tJ_1(t)\Big|_{\rho\to 0+}^1-u^{-3}\int_0^u \varphi'(\frac{t}{u})tJ_1(t)\mathrm{d}t$$

$$=-u^{-3}\int_0^u \varphi'(\frac{t}{u})t^{-1}t^2J_1(t)\mathrm{d}t$$

$$=-u^{-3}\varphi'(\frac{t}{u})t^{-1}t^2J_2(t)\Big|_{\rho\to 0+}^1+u^{-3}\int_0^u \frac{\frac{t}{u}\varphi''(\frac{t}{u})-\varphi'(\frac{t}{u})}{t^2}t^2J_2(t)\mathrm{d}t$$

$$=u^{-3}(\int_0^1+\int_1^u)[\frac{t}{u}\varphi''(\frac{t}{u})-\varphi'(\frac{t}{u})]J_2(t)\mathrm{d}t.$$

以上是利用公式

$$\frac{\mathrm{d}}{dt}[t^{\nu+1}J_{\nu+1}(t)]=t^{\nu+1}J_\nu(t)$$

做两次分部积分得到的．注意到$\frac{t}{u}\varphi''(\frac{t}{u})$及$\varphi'(\frac{t}{u})$的有界性($0<t\leqslant u$)，并利用Bessel 函数的如下估计

$$J_\nu(t)=0(t^{-1/2})\ (t\to\infty,\ \nu>-1),\quad J_\nu(t)=O(t^\nu)\ (t\to 0,\nu>-1),$$

易得

$$\int_0^1 \varphi(t)tJ_0(ut)\mathrm{d}t=O(u^{-5/2}) \quad (u\geqslant 1).$$

从而(11)式当$k=2$时为真．上面的讨论证明了

定理 3 (C, 1)平均的饱和度为R^{-1}，饱和类为$F(\sigma, X_p)=V(X_p, |m|)$．

注 利用[1]和[2]的结果，可给出$F(\sigma, X_p)$的另一种描述：

$$F(\sigma, X_p)=\{f\in X_p,\ \|\Delta^{1/2}f\|=O(1)\}.$$

由第一节的引理3我们知道，当$\alpha>(n-1)\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|$，$1\leqslant p\leqslant\infty$时，广义Riesz平均$\{{}^{l}S_R^{\alpha}\}$的饱和度为$R^{-l}$，饱和类是$V(X_p, |m|^l)$．现在我们对其特征情形Bochner-Riesz平均再给出另一种饱和类的刻划．

定理 4 设$f\in C(Q)$，则以下各条性质等价：

(1) $f\in F(S^{\alpha}, C(Q))=V(C(Q), |m|^2)$ $\left(\alpha>\frac{k-1}{2}\right)$;

(2) $\|\triangle S_R^{\alpha}(f)\|_C=\|S_R^{\alpha}(f^{[2]})\|_C=O(1)$ $(R\to\infty)$且$f\in C^1(Q)$;

(3) $\|f_x'(t)\|_C=\sup\limits_{x\in Q}|f_x'(t)|\leqslant Mt$ $(t\geqslant 0)$,

其中$M>0$是一个与f、α有关的常数．$\triangle=\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$是Laplace算子．

证 (1)⇒(2)：设$f\in F(S^{\alpha}, C(Q))$，由引理2即知$\|\triangle S_R^{\alpha}(f)\|_C=O(1)$ $(R\to\infty)$．再由通常的方法可证$f\in C^1(Q)$．

(2)⇒(3)：不妨设$\|\triangle S_R^{\alpha}(f)\|_C\leqslant M$，由于$f\in C^1(Q)$，

$$f_x'(t)\triangleq\frac{d}{dt}\left(\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\frac{1}{2}\pi^{-k/2}\int_{|\xi|=1}f(x+t\xi)\,d\sigma(\xi)\right)$$

$$=\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\frac{1}{2}\pi^{-k/2}\int_{|\xi|=1}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f(u)}{\partial u_j}\Big|_{u=x+t\xi}\cdot\xi_j\,d\sigma(\xi)$$

$$=\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\frac{1}{2}\pi^{-k/2}\left\{\int_{|\xi|=1}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial f(u)}{\partial u_j}-\frac{\partial S_R^{\alpha}(f;u)}{\partial u_j}\right)\Big|_{u=x+t\xi}\cdot\xi_j\,d\sigma(\xi)+\right.$$

$$\left.+\int_{|\xi|=1}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial S_R^{\alpha}(f;u)}{\partial u_j}\Big|_{u=x+t\xi}\cdot\xi_j\,d\sigma(\xi)\right\}=I_1+I_2$$

显然$\lim\limits_{R\to\infty}I_1=0$．对$I_2$，据格林公式，有

$$|I_2|=\left|\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\frac{1}{2}\pi^{-k/2}\int_{|\xi|<1}\triangle S_R^{\alpha}(f;x+t\xi)\,t\,d\xi\right|\leqslant Mt\quad(t\geqslant 0).$$

$$|f_x'(t)|\leqslant\lim_{R\to\infty}I_1+\lim_{R\to\infty}I_2\leqslant Mt\ .$$

(3)⇒(1)：由Bochner公式[6]，

$$S_R^{\alpha}(f;x)=c_1R^k\int_0^{\infty}f_x(t)t^{k-1}J_{\alpha+k/2}(tR)(tR)^{-(\alpha+k)/2}dt\quad\left(\alpha>\frac{k-1}{2}\right),$$

其中$c_1=2^{(\alpha-k)/2-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)^{-1}$．于是

$$S_R^{\alpha}(f;x)-f(x)=c_1\int_0^{\infty}\left[f_x\left(\frac{t}{k}\right)-f(x)\right]J_{(\alpha+k)/2}(t)t^{k/2-\alpha-1}dt$$

$$=-\left[f_x\left(\frac{t}{R}\right)-f(x)\right]\int_t^{\infty}J_{\alpha+k/2}(u)u^{k/2-\alpha-1}du\Big|_{t=0}^{\infty}+$$

$$+\frac{1}{R}\int_0^\infty f'_x(t)\int_t^\infty J_{\alpha+k/2}(u)u^{k/2-\alpha-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{R}\left(\int_0^1+\int_1^\infty\right)f'_x\left(\frac{t}{R}\right)\int_t^\infty J_{\alpha+k/2}(u)u^{k/2-\alpha-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}t\,.$$

根引理 2，只要$\alpha>\frac{k-1}{2}$，F(S^α, C(Q))都是一样的．取充分大的α可使$\left|\int_1^\infty t\int_t^\infty J_{\alpha+k/2}(u)u^{k/2-\alpha-1}\right.$ $\left.\mathrm{d}u\mathrm{d}t\right|<\infty$，另外显然有$\left|\int_0^1 t\int_t^\infty J_{\alpha+k/2}(u)u^{k/2-\alpha-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}t\right|<\infty$．于是便得到了$\|S_R^\alpha(f)-f\|_C\leqslant\frac{M}{R}$，从而$f\in$F($S^\alpha$, C(Q))．

推论 设$k=1$，则$f\in$F(S^α, $C_{2\pi}$)的充要条件是$f'\in$Lip1．

这是因为当$k=1$时，$\|f'_x(t)\|_C\leqslant Mt$等价于$f'\in$Lip1．

最后，我们再对低于临界阶$(k-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)$的广义Riesz平均的饱和问题作一些探讨．由于$\{{}^lS_R^\alpha\}$作为$X_p\to X_p$的线性算子已不再对$R$是一致有界的了，所以饱和类的确定变得较为困难．这里，我们只给出某些信息来．

引理 3 若$\alpha_1>\alpha>0$，则F(${}^lS^\alpha$, X_p)$\subset$F(${}^lS^{\alpha_1}$, X_p)．

证 我们先建立一个不同阶广义Riesz平均之间的关系．记

$$A_\nu(x)\triangleq\sum_{|m|=\nu}a_m(f)e^{imx},\quad A_t^{l,\alpha}(x)\triangleq\sum_{\nu<t^2}(t^l-\nu^{l/2})^\alpha A_\nu(x)\quad\text{就有}$$

$$\alpha l\int_0^t(t^l-\tau^l)^{\alpha-1}\tau^{l-1}A_\tau^{l,0}(x)\mathrm{d}\tau=\alpha l\int_0^t(t^l-\tau^l)^{\alpha-1}\tau^{l-1}\sum_{\nu<t}A_\nu(x)\chi_{[\sqrt{\nu},t]}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\sum_{\sqrt{\nu}<t}\alpha l\int_{\sqrt{\nu}}^t(t^l-\tau^l)^{\alpha-1}\tau^{l-1}\mathrm{d}\tau A_\nu(x)=\sum_{\sqrt{\nu}<t}(t^l-\sqrt{\nu}^l)^\alpha A_\nu(x)=A_t^{l,\alpha}(x),$$

因而有

$$\int_0^R(R^l-t^l)^{\beta-1}t^{l-1}A_t^{l,\alpha}(x)\mathrm{d}t=\alpha l\int_0^R(R^l-t^l)^{\beta-1}t^{l-1}\mathrm{d}t\int_0^t(t^l-u^l)^{\alpha-1}u^{l-1}A_u^{l,0}(x)\mathrm{d}u$$

$$=\alpha l\int_0^R u^{l-1}A_u^{l,0}(x)\mathrm{d}u\int_u^R(R^l-t^l)^{\beta-1}(t^l-u^l)^{\alpha-1}t^{l-1}\mathrm{d}t=\alpha\int_0^R u^{l-1}(R^l-u^l)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)\cdot$$

$$A_u^{l,0}(x)\mathrm{d}u=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{l\Gamma(\alpha+\beta+1)}A_R^{l,\alpha+\beta}(x).$$

最后得到

$${}^lS_R^{\alpha+\beta}(f;x)=\frac{l\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}\cdot\frac{1}{R^{l(\alpha+\beta)}}\int_0^R(R^l-t^l)^{\beta-1}t^{l\alpha+l-1}\cdot{}^lS_t^\alpha(f;x)\mathrm{d}t\,.\quad(13)$$

对$f\in X_p$，由积分形式的Minkowski不等式得出

$$\|f-{}^lS_R^{\alpha+\beta}(f)\|\leqslant A_{\alpha,\beta,l}R^{-l(\alpha+\beta)}\int_0^R(R^l-t^l)^{\beta-1}t^{l\alpha+l-1}\|f-{}^lS_t^\alpha(f)\|\mathrm{d}t\,.$$

由此易证F(${}^lS^\alpha$, X_p)$\subset$F(${}^lS^{\alpha_1}$, X_p)．引理 3 证毕．

命题 1 设$f\in X_p$，$\alpha>0$．则定理 1 中的(i)和(ii)仍为$f\in$F(${}^lS^\alpha$, X_p)的必要条件．

证 由假设，$\|f-{}^lS_R^\alpha(f)\|=O(R^{-l})$，于是由引理 3 知，$\|f-{}^lR_R^{\alpha+1}(f)\|=O(R^{-l})$，

从而 $\quad \|{}^{l}S_R^{\alpha+1}(f)-{}^{l}S_R^{\alpha}(f)\|=R^{-l}\|\sum\limits_{|m|<R}(1-\frac{|m|^l}{R^l})^{\alpha}|m|^l a_m(f)e^{imx}\|=O(R^{-l})$.

于是(i)成立．为证(ii)，取某个$\alpha_1>\max(\alpha,\frac{k-1}{2})$，则$f\in F({}^{l}S^{\alpha},X_p)$．于是$f\in V(X_p,|m|^l)$．即(ii)成立．

命题2 设$f\in X_p$，则$f\in F({}^{l}S^{1},X_p)$的主要条件是(i)成立，也就是

$$\|\sum_{|m|<R}(1-|\frac{m}{R}|^l)|m|^l a_m(f)e^{imx}\|=O(1)\quad(R\to\infty)\tag{14}$$

证 据命题1，我们只需证明条件(14)的充分性．为此我们先给出${}^{l}S_R^1(f)$用${}^{l}S_r^1(f^{[l]})$表示的一个公式

$$\begin{aligned}{}^{l}S_R^1(f)=&a_0+([R^2]-1)^{-l/2}\,{}^{l}S_R^1(f^{[l]})+\sum_{j=1}^{[R^2]-2}(j^{-l/2}-(j+1)^{-l/2})\,{}^{l}S^1_{\sqrt{j+1}}(f^{[l]})\\&+\frac{([R^2]+1)^{l/2}\,{}^{l}S^1_{\sqrt{[R^2]+1}}(f^{[l]})-([R^2])^{l/2}\,{}^{l}S^1_{\sqrt{[R^2]}}(f^{[l]})}{([R^2]+1)^{l/2}-([R^2])^{l/2}}([R^2]^{-l/2}-R^{-l})\end{aligned}\tag{15}$$

这可仿照陈天平[3]的方法得到．

现在我们假设(14)成立，即$\|{}^{l}S_R^1(f^{[l]})\|\leqslant M$．取$R'>R\geqslant 2$，由(15)得到

$$\begin{aligned}\|{}^{l}S_{R'}^1(f)-{}^{l}S_R^1(f)\|=&\|([R'^2]-1)^{-l/2}\,{}^{l}S^1_{\sqrt{[R'^2]}}(f^{[l]})\\&-([R^2]-1)^{-l/2}\,{}^{l}S^1_{\sqrt{[R^2]}}(f^{[l]})+\sum_{j=[R^2]-1}^{[R'^2]-2}(j^{-l/2}-(j+1)^{-l/2})\,{}^{l}S^1_{\sqrt{j+1}}(f^{[l]})\\&+\frac{([R'^2]+1)^{l/2}\,{}^{l}S^1_{\sqrt{[R'^2]+1}}(f^{[l]})-[R'^2]^{l/2}\,{}^{l}S^1_{\sqrt{[R'^2]}}(f^{[l]})}{([R'^2]+1)^{l/2}-[R'^2]^{l/2}}(\frac{1}{[R'^2]^{l/2}}-\frac{1}{R'^l})\\&-\frac{([R^2]+1)^{l/2}\,{}^{l}S^1_{\sqrt{[R^2]+1}}(f^{[l]})-[R^2]^{l/2}\,{}^{l}S^1_{\sqrt{[R^2]}}(f^{[l]})}{([R^2]+1)^{l/2}-[R^2]^{l/2}}(\frac{1}{[R^2]^{l/2}}-\frac{1}{R^l})\|\leqslant\frac{8M}{R^l}\end{aligned}\tag{16}$$

于是$\{{}^{l}S_R^1(f)\}$在X_p尺度下当$R\to\infty$时满足Cauchy条件，从而存在$f_1\in X_p$使$\lim\limits_{R\to\infty}{}^{l}S_R^1(f;x)=f_1(x)$在范数收敛意义下成立．显然$f_1=f$．在(16)中令$R'\to\infty$就得到$\|f-{}^{l}S_R^1(f)\|\leqslant\frac{8M}{R^l}$，即$f\in F({}^{l}S^1,X_p)$．命题2证毕．

命题2事实上给出了典型平均饱和类的刻划．由于这一结果，我们猜测

$$\|\sum_{|m|<R}(1-|\frac{m}{R}|^l)^{\alpha}|m|^l a_m(f)e^{imx}\|=O(1)\quad(R\to\infty)$$

是$\alpha>0$阶的广义Riesz平均算子饱和的充要条件．

参 考 文 献

[1] 程民德、陈永和，北京大学学报（自然科学版）1957年，259—279.

[2] 程民德、邓东皋，科学通报，V. 24(1979)，18：817—820.

[3] 陈天平，数学学报，V. 16(1966)，179—193.

[4] 蒋迅，北京师范大学学报（自然科学版），1985年第3期

[5] E. M. Steim and G. Weiss, Introdution to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton University Press, 1971.

[6] S. Bochner, Trans. AMS., V. 40(1936), 175—207.

[7] W. Trebel, Multipliers for (C, α) Bounded Fourier Expansions in Banach Spaces and Approximation Theory, Leture Notes in Math, V. 329.

[8] Shi Xian liang, Journal of Approximation Theory and its Applications, V. 1(1984), 81—93.