关于A·Aziz的几个不等式的推广和彻底改进*

陈　文　平

（福建师范大学，福州）

一、导引

记$z_k = e^{\frac{(2k+1)}{n}\pi i}$，$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$，是$z^n + 1 = 0$的全部根．1984年，$A$、$Aziz$在［1］中证明了：

（A）　设$P(z)$是n次多项式，$P(1) = 0$，则

$$\max_{|z|=1}\left|\frac{P(z)}{z-1}\right| \leqslant \frac{n}{2}\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}|P(z_k)| \leqslant \frac{n}{2}\max_{|z|=1}|P(z)| \tag{1}$$

$$|P'(1)| \leqslant \frac{n}{2}\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}|P(z_n)| \leqslant \frac{n}{2}\max_{|z|=1}|P(z)| \tag{2}$$

这四个不等式都是最佳可能的，当$P(z) = 1 - z^n$时等号都成立．

（B）　设$0 \leqslant \beta < 1$，$P(z)$是n次多项式，$P(\beta) = 0$，则

$$\max_{|z|=\beta}\left|\frac{P(z)}{z-\beta}\right| \leqslant \frac{n}{1+\beta}\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}|P(z_k)| \leqslant \frac{n}{1+\beta}\max_{|z|=1}|P(z)| \tag{3}$$

$$|P'(\beta)| \leqslant \frac{n}{1+\beta}\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}|P(z_n)| \leqslant \frac{n}{1+\beta}\max_{|z|=1}|P(z)| \tag{4}$$

但是，正如A，$Aziz$所指出的，不等式（3）、（4）至少当$\beta = 0$时是不精确的，因此［1］遗留下一个问题：改进（3）与（4），使成为最佳可能的．

本文解决了这个问题，证明了

定理　设$P(z)$是一个n次多项式，$\beta \geqslant 0$，$P(\beta) = 0$，则

$$\max_{|z|=\beta}\left|\frac{P(z)}{z-\beta}\right| \leqslant \frac{(1-\beta^n)}{(1-\beta^2)}\max_{0\leqslant k< n-1}|P(z_k)| \leqslant \frac{(1-\beta^n)}{(1-\beta^2)}\max_{|z|=1}|P(z)| \tag{5}$$

从而

$$|P'(\beta)| \leqslant \frac{(1-\beta^n)}{(1-\beta^2)}\max_{0\leqslant k< n-1}|P(z_k)| \leqslant \frac{(1-\beta^n)}{(1-\beta^2)}\max_{|z|=1}|P(z)| \tag{6}$$

这四个不等式都是最佳可能的，等号当

$$P_\beta(z) = \frac{(z-\beta)}{(1-\beta z)}(1-\beta^n z^n) = (z-\beta)(1+\beta z+\beta^2 z^2+\cdots+\beta^{n-1}z^{n-1}) \tag{7}$$

时达到．

注记　要证最佳可能性时，只要证

* 1986年5月27日收到．

$$\max_{|z|=\beta}\left|\frac{P_\beta(z)}{z-\beta}\right| = |P'_\beta(\beta)| = \frac{(1-\beta^{2n})}{(1-\beta^2)}, \qquad \max_{|z|=1}|P_\beta(z)| = \max_{0\le k\le n-1}|P_\beta(z_k)| = 1+\beta^n$$

就行了，这时用到：当 $|z|=1$，β为实时，$\dfrac{|z-\beta|}{|1-\beta z|}=1$，

二、几个引理

记号： $\theta_k=\dfrac{2k\pi}{n}$，$S_n(v)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin v\theta_k$， $C_n(v)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos v\theta_k$，

$$b_n(\beta,\theta)=\frac{1}{1-2\beta\cos\theta+\beta^2},\quad L_n(\beta,\theta)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1-2\beta\cos(\theta_k-\theta)+\beta^2},$$

引理 1 设v是整数，则

$$S_n(v)=0,\qquad C_n(v)=\begin{cases}0, & \text{当} v/n \text{不是整数},\\ n, & \text{当} v/n \text{是整数}.\end{cases} \tag{8}$$

证明 令$\rho=e^{2v\pi i/n}$，若v/n是整数，则$\sin v\theta_k=0$，$\cos v\theta_k=1$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$，故此时(8)成立．设v/n不是整数，则$\rho\neq1$，而

$$C_n(v)+iS_n(v)=\sum_{k=0}^{n-1}\rho^k=\frac{1-\rho^n}{1-\rho}=0 \quad (\text{因}\rho^n=1)$$

故 $C_n(v)=S_n(v)=0$，即此时(8)也成立．

引理 2 当 $|\beta|<1$时，

$$b_n(\beta,\theta)=\frac{2}{1-\beta^2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{v=1}^{\infty}\beta^v\cos v\theta\right). \tag{9}$$

证明 此式就是

$$\frac{1-\beta^2}{2(1-2\beta\cos\theta+\beta^2)}=\frac{1}{2}+\sum_{v=1}^{\infty}\beta^v\cos v\theta \quad , \tag{10}$$

见于[2](其中的r就是本文的β)．

引理 3

$$L_n(\beta,\theta)=\frac{n(1-\beta^{2n})}{(1-\beta^2)(1-2\beta^n\cos n\theta+\beta^{2n})} \tag{11}$$

证明 若 $|\beta|<1$，则

$$L_n(\beta,\theta)=\sum_{k=0}^{n-1}b_n(\beta,\theta_k-\theta)=\frac{2}{1-\beta^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2}+\sum_{v=1}^{\infty}\beta^v\cos v(\theta_k-\theta)\right]$$

$$=\frac{2}{1-\beta^2}\left[\frac{n}{2}+\sum_{v=1}^{\infty}\beta^v[\cos v\theta C_n(v)+\sin v\theta S_n(v)]\right]=\frac{2}{1-\beta^2}\left[\frac{n}{2}+n\sum_{u=1}^{\infty}\beta^{nu}\cos nu\theta\right]$$

$$=n\frac{2}{(1-\beta^2)}\frac{(1-\beta^{2n})}{2}\left(\frac{1}{1-2\beta^n\cos n\theta+\beta^{2n}}\right)=\frac{n(1-\beta^{2n})}{(1-\beta^2)}\frac{1}{1-2\beta^n\cos n\theta+\beta^{2n}}.$$

若 $|\beta|>1$，则

$$L_n(\beta,\theta)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1-2\beta\cos(\theta_k-\theta)+\beta^2}=\frac{1}{\beta^2}L_n\left(\frac{1}{\beta},\ \theta\right)$$

$$=\frac{n\left(1-\dfrac{1}{\beta^{2n}}\right)}{\beta^2\left(1-\dfrac{1}{\beta^2}\right)\left(1-\dfrac{2}{\beta^n}\cos n\theta+\dfrac{1}{\beta^{2n}}\right)}=\frac{n(1-\beta^{2n})}{(1-\beta^2)(1-2\beta^n\cos n\theta+\beta^{2n})}$$

若$\beta=\pm 1$．则可取极限．引理3证毕．

三、定理的证明

不妨设$z=\beta e^{ia}$，$\beta\neq 1$ （$\beta=1$ 的情形Aziz已证明了）．因$P(\beta)=0$，故$P(z)/z-\beta$是z的$n-1$次多项式．对它作以$z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$为基点的插值多项式：

$$\frac{P(z)}{(z-\beta)}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P(z_k)\quad(1+z^n)}{(z_k-\beta)(z-z_k)nz_k^{n-1}}=\frac{(1+z^n)}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P(z_k)z_k}{(z_k-\beta)(z_k-z)},$$

$$\left|\frac{P(z)}{z-\beta}\right|\leqslant\frac{I}{n}|1+z^n|\max_{0\leq k\leq n-1}|P(z_n)| \tag{12}$$

$$I=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{|z_k-\beta|\,|z_k-z|}\leqslant\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{|z_k-\beta|^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{|z_k-z|^2}}.$$

但

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{|z_k-z|^2}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{|e^{(\theta_k+\pi/n)i}-\beta e^{ia}|^2}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1-2\beta\cos[\theta_k-(a-\pi/n)]+\beta^2}=L_n\left(\beta, a-\frac{\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{n(1-\beta^{2n})}{(1-\beta^2)(1-2\beta^n\cos n(a-\pi/n)+\beta^{2n}}$$

$$=\frac{n(1-\beta^{2n})}{(1-\beta^2)(1+2\beta^n\cos na+\beta^{2n})}$$

$$=\frac{n(1-\beta^{2n})}{(1-\beta^2)\,|[1+(\beta e^{ia})^n]|^2}=\frac{n(1-\beta^{2n})}{(1-\beta^2)\,|1+z^n|^2},$$

而

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{|z_k-\beta|^2}=L_n\left(\beta, 0-\frac{\pi}{n}\right)=\frac{n(1-\beta^{2n})}{(1-\beta^2)(1+\beta^n)^2},$$

故

$$I\leqslant\sqrt{\frac{n(1-\beta^{2n})\,n(1-\beta^{2n})}{(1-\beta^2)(1+\beta^n)^2(1-\beta^2)\,|1+z^n|^2}}=\frac{n(1-\beta^n)}{(1-\beta^2)\,|1+z^n|}.$$

代入(12)，即证明了定理．

参 考 文 献

[1] Abdul Aziz, Inequalities for polynomials with a prescribed zero, J. Approx Theory, Vol.41 (1984, May), pp15—20.

[2] 陈建功，三角级数论上册，pp 1—2．