1988年11月

数学研究与评论
第八卷 第四期

离散大系统在结构扰动下周期解的存在性*

王慕秋 王联 崔学伟

(中国科学院数学所) (曲阜师范学院)

对于离散系统稳定性的研究，近年来受到人们的重视，但对于周期解的研究，在文献中还很少看到．本文首先讨论了离散系统解的有界性，并且得到了若一个具有周期系数的差分方程的解为最终有界的，则存在周期解的结果．然后利用李雅普诺夫函数方法研究了离散大系统在结构扰动之下周期解的存在性和离散大系统的平稳振荡．

§1 解的有界性和周期解的存在性

考虑离散系统

$$x(\tau+1)=f(\tau,x(\tau)) \tag{1}$$

$\tau\in \mathrm{I}\triangleq\{t_0+k\}$，$t_0\geqslant 0$，$k=0,1,2,\cdots$，$x\in \boldsymbol{R}^n$

$f:\mathrm{I}\times \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}^n$ 连续．

我们用$|\cdot|$表示向量的模，$\|\cdot\|$表示矩阵的模．

定义1 我们称方程（1）的解$x(\tau,\tau_0,x^0)$是有界的，如果存在$\beta>0$，使当$\tau\geqslant\tau_0$时（$\tau_0\in \mathrm{I}$）

$$|x(\tau,\tau_0,x^0)|<\beta.$$

若方程（1）的所有解有界，则说系统（1）的解有界．

定义2 若对任何$a>0$和$\tau_0\in\mathrm{I}$，存在正数$\beta(\tau_0,a)$，使得当$|x^0|\leqslant a$时，

$$|x(\tau,\tau_0,x^0)|<\beta(\tau_0,a)\qquad(\tau\geqslant\tau_0)$$

则方程（1）的解叫做等度有界的．若β与τ_0无关，则称方程（1）的解为一致有界的．

定义3 我们称方程（1）的解是最终有界的，如果存在$B>0$，使得每个解有正数$T(\tau_0,x^0)$

$$|x(\tau,\tau_0,x^0)|<B\qquad \tau\geqslant\tau_0+T$$

定义4 对系统（1）如果存在$B>0$,对任意$a>0$和$\tau_0\in\mathrm{I}$，存在$T(\tau_0,a)>0$,使当$|x^0|\leqslant a$时，

$$|x(\tau,\tau_0,x^0)|<B\qquad \tau\geqslant\tau_0+T$$

则称系统（1）的解为等度最终有界的．如果T与τ_0无关，则称（1）的解为一致最终有界的．

引理1 若系统（1）的解是一致有界的，且最终有界，则系统（1）的解是等度最终有界的．

因为此引理的证明平行于[1]中66页定理8.6之证明，故这里略去，详细证明可参考[2]．

---

* 1986年3月12日收到．

对于周期系统

$$x(\tau+1)=f(\tau,x(\tau)) \tag{2}$$

$f(\tau+m,x)=f(\tau,x)$ $m>0$ 为整数，$f:\mathrm{I}\times \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}^n$关于$x$连续.

引理 2 (i) 若(2)的解是等度有界的，则它们是一致有界的.

(ii) 若(2)的解为等度最终有界的，则它们是一致最终有界的.

证 (i) 因(2)的周期为m，故任给方程的解$x(\tau,\tau_0,x_0)$，$\tau_0\in\mathrm{I}$，则有

$$x(\tau,\tau_0,x_0)=x(\tau+km,\tau_0+km,x_0)\quad k\text{为正整}.$$

故只需考虑$\tau_0=t_0,\tau_0+1,\cdots,t_0+m-1$即可.因(2)的解为等度有界,故任给$a>0$和$\tau_0(\tau_0=t_0+k$，$0\leqslant k\leqslant m-1)$，存在$\beta(\tau_0,a)>0$，$(0\leqslant\tau_0\leqslant m-1)$，使得当$|x_0|<a$时，$|x(\tau,\tau_0,x_0)|<\beta(\tau_0,a)$

取 $\beta(a)=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant m-1}\{\beta(\tau_0,a)\}$，则对任$\tau_0\in\mathrm{I}$，都有

$$|x(\tau,\tau_0,x_0)|<\beta(a).$$

故系统(2)的解为一致有界的.

(ii)的证明与(i)的证明类似，略去.

引理 3 若系统(2)的解是最终有界的，设其界为B，则(2)的解为一致有界的，且是一致最终有界的.

证明 先证系统(2)的解为等度有界，若不然，则存在$a>0$，$\tau_0\in\mathrm{I}$和序列$\{x_k^0\}$，$\{\tau_k\}$，使得$|x_k^0|<a$，$\tau_k>\tau_0$，且$|x(\tau_k,\tau_0,x_k^0)|\geqslant k$，不妨设$B<a<k$，则存在满足

$$|x(n_k,\tau_0,x_k^0)|\leqslant a,\quad n_k\in\mathrm{I},$$

$|x(\tau,\tau_0,x_k^0)|>a$ 当$n_k<\tau\leqslant\tau_k$时的n_k. 令$m_k\geqslant 0$ 为整数，$n_k=m_km+\sigma_k$，$0\leqslant\sigma_k<m$，令$\tau_k=m_km+\tau_k'$，$y_k=x(n_k,\tau_0,x_k^0)$，则

$x(\tau,\tau_0,x_k^0)=x(\tau,n_k,y_k)$ $(\tau\geqslant n_k)$. 且由(2)为m-周期的，故$x(\tau,\sigma_k,y_k)=x(\tau+m_km,n_k,y_k)$，$\tau\geqslant\sigma_k$. 所以$|x(\tau_k',\sigma_k,y_k)|\geqslant k$，$|x(\tau,\sigma_k,y_k)|>a$ $(\sigma_k<\tau\leqslant\tau_k')$. 由$|y_k|\leqslant a$知，$\{y_k\}$为有界序列，存在收敛子序列$y_{k_j}\to y_0$，$j\to\infty$，$k_j\to\infty$，$\sigma_{k_j}\equiv\sigma_0$，这里$|y_0|\leqslant a$，$0\leqslant\sigma_0<m$. 由解的最终有界性知，存在正整数$T(\sigma_0,y_0)$，使$|x(\tau,\sigma_0,y_0)|<B$，$\tau\geqslant\sigma_0+T$. 由解对初值的连续依赖性知，当$j$足够大时，$x(\tau,\sigma_0,y_{k_j})$与$x(\tau,\sigma_0,y_0)$充分接近，这里$\sigma_0\leqslant\tau\leqslant\sigma_0+T$. 设

$$|x(\tau,\sigma_0,y_0)|<P,\quad \sigma_0\leqslant\tau\leqslant\sigma_0+T$$

从而有N使当$j\geqslant N$时

$$|x(\tau,\sigma_0,y_{k_j})|\leqslant P,\quad \sigma_0\leqslant\tau\leqslant\sigma_0+T.$$

因$|x(\tau_{k_j}',\sigma_0,y_{k_j})|\geqslant k_j$，$k_j\to\infty$，$j\to\infty$. 故当$j$充分大时$\tau_{k_j}'>\sigma_0+T$，而$\sigma_0\leqslant\tau\leqslant\tau_{k_j}'$时

$$|x(\tau,\sigma_0,y_{k_j})|\geqslant a$$

与$|x(\sigma_0+T,\sigma_0,y_{k_j})|<B<a$对足够大的$j$成立矛盾. 故解为等度有界的，再由引理1和引理2知方程(2)的解为一致有界且为一致最终有界的.

下面用李雅普诺夫函数方法讨论差分方程的解的有界性.

令$V(\tau,x)$是定义在$\mathrm{I}\times\mathrm{G}$上的实值函数，关于$x$连续，G为$\boldsymbol{R}^n$上的任一子集，定义

$$\triangle V(\tau,x)=V(\tau+1,x(\tau+1))-V(\tau,x(\tau))=V(\tau+1,f(\tau,x(\tau)))-V(\tau,x(\tau)).$$

定理 1 对系统(1)若存在一正函数$V(\tau,x)$，它在空间$\mathrm{I}\times S_{R_0}^C$ $(|x|>R_0)$内定义，且具有性质

(i) 存在正连续增函数$a(r)$，使得$V(\tau,x)\leqslant a(|x|)$，

(ii) 存在非负连续增函数$b(r)$，使得$b(|x|)\leqslant V(\tau,x)$，且$\lim\limits_{r\to\infty}b(r)=\infty$；

(iii)在$I\times S_{R_0}^C$内$\triangle V\leqslant 0$，

则(1)的解为一致有界的.

此定理之证明与微分方程中相应的定理之证明类似，故略去.

定理2 若系统(1)存在正函数$V(\tau,x)$，在空间$I\times S_{R_0}^C(|x|>R_0)$内定义，且满足定理1中所述的性质(i)、(ii)，另外还满足

(iii)′ 存在正连续函数$c(r)$，使得$\triangle V\leqslant -c(|x|)$，则系统(1)的解是一致最终有界的.

证明 据定理1知系统之解为一致有界，故存在一正数B，使当$x_0\in S_{R_0}(|x|\leqslant R_0)$(可适当选取$R_0>0$)时就有

$$|x(\tau,\tau_0,x_0)|<B \qquad (\tau\geqslant\tau_0).$$

任取$\alpha>0$(不妨取$\alpha>R_0$)，则由一致有界性知存在$\beta>0$，使当$|x_0|\leqslant\alpha$ $\tau\geqslant\tau_0$时，$|x(\tau,\tau_0,x_0)|<\beta$ $(\tau_0\in I)$. 由(iii)′，$\triangle V\leqslant -c(|x|)$，因$c(|x|)$在$R_0\leqslant|x|\leqslant\beta$上连续，故存在一仅依赖于$\beta$的正数$\lambda(\beta)$，使当$\tau\in I$，$R_0\leqslant|x|\leqslant\beta$时，$\triangle V(\tau,x)\leqslant-\lambda(\beta)$.

若$\tau_0\in I$，$R_0<|x_0|\leqslant\alpha$，则必存在$\tau'\geqslant\tau_0$ 使得$|x(\tau',\tau,x_0)|\leqslant R_0$. 若不然，则对$\tau\geqslant\tau_0$有

$$V(\tau,x(\tau,\tau_0,x_0))-V(\tau_0,x_0)\leqslant-(\tau-\tau_0)\lambda.$$

由V非负知上式左边有下界，右边当$\tau\to\infty$时趋于$-\infty$，矛盾. 而当$R_0<|x|\leqslant\alpha$时，$V(\tau,x)\leqslant a(|x|)\leqslant a(\alpha)$，故

$$-a(\alpha)\leqslant V(\tau,x(\tau,\tau_0,x_0))-V(\tau_0,x_0).$$

由此可选取$\tau'\leqslant\tau_0+a(\alpha)/\lambda+1$，记$T=a(\alpha)/\lambda+1$，则当$|x_0|\leqslant\alpha$，$\tau>\tau_0+T$时，$|x(\tau,\tau_0,x_0)|<B$，注意到$T$仅与$\alpha$有关，故系统(1)的解为一致最终有界的.

为了证明下面的定理，我们引入

引理4[1] 假定S和S_1是巴拿赫空间X的开凸子集，S_0是X的闭凸子集，$S_0\subset S_1\subset S$，若T是S到X的一个连续映射，且$T(S)$包含在X的一个紧集内，如果存在一正整数p，T^p在S_1上有定义，且$\bigcup\limits_{0\leq j\leq p}T^j(S_0)\subset S_1$，$T^p(S_1)\subset S_0$，则$T$在$S_0$中有一不动点.

定理3 若系统(2)的解为最终有界的，其界为B，则(2)存在一个周期为m的周期解$x(\tau)$，使得$|x(\tau)|<B$.

证明 由引理3知，(2)的解是一致有界的，且是一致最终有界的. 设一致最终有界的界为$H\geqslant B$，作映射

$$T:\ x_0\to x(\tau_0+m,\ \tau_0,x_0) \qquad (\tau_0\in I),$$

则T为连续的. 由解为一致有界知，存在$\beta(H)>0$，使得若$x_0\in\bar{S}_H$，$S_H=\{x,\ |x|<H\}$($\bar{S}_H$表示S_H的闭包)，则

$$|x(\tau,\tau_0,x_0)|<\beta \qquad (\tau\geqslant\tau_0).$$

同理，存在$r(\beta)>0$，使当$x_0\in\bar{S}_\beta$时，

$$|x(\tau,\tau_0,x_0)|<r \qquad (\tau\geqslant\tau_0);$$

存在$r^*(r)>0$，使当$x_0\in\bar{S}_r$时，

$$|x(\tau,\tau_0,x_0)|<r^* \qquad (\tau\geqslant\tau_0).$$

故$T(S_r)\subset\bar{S}_{r^*}$，且$S_{r^*}$为紧集．由系统（2）的解为一致最终有界知存在正整数N，当$\tau\geqslant N+\tau_0$，$|x_0|<\beta$时，$|x(\tau,\tau_0,x_0)|<H$，即存在正整数p，使得$|x(\tau_0+pm,\tau_0,x_0)|<H$．

令$\bar{S}_H$为引理4中的S_0，S_β为S_1，S_r为S．则引理4中的所有条件满足．故在$\bar{S}_H$中T有一不动点，即（2）存在一m—周期解$x(\tau)$，再由最终有界性知$|x(\tau)|<B$．

§2　结构扰动下周期解的存在性

对于离散大系统$\bar{\delta}$

$$x(\tau+1)=f(\tau,x(\tau))\tag{3}$$

$\tau\in I$，$x\in R^n$，$f: I\times R^n\to R^n$关于x连续．

设系统$\bar{\delta}$分解为S个互联子系统$\bar{\delta}_i$

$$x_i(\tau+1)=g_i(\tau,x_i(\tau))+h_i(\tau,x(\tau))\qquad(i=1,\cdots,S)\tag{4}$$

其中$x_i\in R^{n_i}$，$\sum\limits_{i=1}^{s}n_i=n$，$g_i$：$I\times R^{n_i}\to R^{n_i}$关于$x_i$连续，$h_i$：$I\times R^n\to R^{n_i}$关于$x$连续，它是子系统$\bar{\delta}_i$和大系统$\bar{\delta}$的相互作用．我们用$\bar{E}=(\bar{e}_{ij})$表示基本关联矩阵，$E=(e_{ij})$表示由$\bar{E}$生成的关联矩阵，其意义如文[3]中所述．

首先研究线性离散系统

$$x(\tau+1)=P(\tau)x(\tau)+R(\tau)\tag{5}$$

$P(\tau)$是$n\times n$阶矩阵，$R(\tau)\in R^n$，$x\in R^n$，$\tau\in I$，$P(\tau+m)=P(\tau)$，$R(\tau+m)=R(\tau)$．
设系统（5）具有分解

$$x^{(i)}(\tau+1)=A_{ii}(\tau)x^{(i)}(\tau)+\sum_{j=1}^{s}e_{ij}B_{ij}(\tau)x^{(j)}(\tau)+R^{(i)}(\tau),i=1,\cdots,S,\tag{6}$$

这里$x^{(i)}\in R^{n_i}$，$R^{(i)}(\tau)\in R^{n_i}$ $(i=1,\cdots,S)$，$\sum\limits_{i=1}^{s}n_i=n$，$A_{ii}(\tau)$为$n_i\times n_i$阶矩阵，$B_{ij}(\tau)$为$n_i\times n_j$阶矩阵，$A_{ii}(\tau+m)=A_{ii}(\tau)$，$B_{ij}(\tau+m)=B_{ij}(\tau)$，$R^{(i)}(\tau+m)=R^{(i)}(\tau)$，$i,j=1,\cdots,S$，则我们有

定理4　若$\|A_{ii}(\tau)\|\leqslant A_{ii}$，$\|B_{ij}\|\leqslant B_{ij}$，$|R^{(i)}(\tau)|\leqslant M$，$\tau\in I$，$i,j=1,\cdots,S$．（$A_{ii}\geqslant0$，$B_{ij}\geqslant0$，$M\geqslant0$为常数），且存在$\delta>0$，使得$\max\limits_{1\leq j\leq S}(A_{jj}+\sum\limits_{i=1}^{s}\bar{e}_{ij}B_{ij})\leqslant1-\delta$，则系统（5）在结构扰动下存在$m$—周期解，即任给$E=(e_{ij})_{S\times S}\in\bar{E}$系统（6）都存在$m$—周期解．且周期解位于有界域$\{x\,\big|\,|x|\leqslant\frac{2SM}{\delta}\}$内．

证明　作李雅普诺夫函数$V^{(i)}(x^{(i)})=|x^{(i)}|$ $(i=1,\cdots,S)$，$V=\sum\limits_{i=1}^{s}V^{(i)}$，

$$\triangle V_{(6)}^{(i)}=|x^{(i)}(\tau+1)|-|x^{(i)}(\tau)|=|A_{ii}(\tau)x^{(i)}(\tau)+\sum_{j=1}^{s}e_{ij}B_{ij}(\tau)x^{(j)}(\tau)+R^{(i)}(\tau)|$$

$$-|x^{(i)}(\tau)|\leqslant(A_{ii}-1)|x^{(i)}(\tau)|+\sum_{j=1}^{s}\bar{e}_{ij}B_{ij}|x^{(j)}(\tau)|+M,$$

$$\triangle V_{(6)}=\sum_{i=1}^{s}\triangle V_{(6)}^{(i)}\leqslant\sum_{i=1}^{s}(A_{ii}-1)|x^{(i)}(\tau)|+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\bar{e}_{ij}B_{ij}|x^{(j)}(\tau)|+SM$$

$$= \sum_{j=1}^{s}(A_{jj}-1+\sum_{i=1}^{s}\bar{e}_{ij}B_{ij})|x^{(j)}(\tau)|+SM\leqslant-\delta\sum_{j=1}^{s}|x^{(j)}(\tau)|+SM$$

$$= -\frac{\delta}{2}\sum_{j=1}^{s}|x^{(j)}(\tau)|+(-\frac{\delta}{2}\sum_{j=1}^{s}|x^{(j)}(\tau)|+SM),$$

则当 $\sum_{j=1}^{s}|x^{(j)}(\tau)|\geqslant\frac{2SM}{\delta}$ 时，$\triangle V_{(6)}\leqslant-\frac{\delta}{2}V$.

由定理 2 和定理 3 知系统（6）对任$E\in\bar{E}$都存在m—周期解．故系统（5）在结构扰动下存在m—周期解．又为当 $\sum_{j=1}^{s}|x^{(j)}(\tau)|>\frac{2SM}{\delta}$时，$\triangle V<0$. 故系统（6）解的最终有界域为 $\sum_{j=1}^{s}|x^{(j)}(\tau)|\leqslant\frac{2SM}{\delta}$, 且由 $|x(\tau)|\leqslant\sum_{j=1}^{s}|x^{(j)}(\tau)|$知，$m$—周期解在域$\{x\,||x|\leqslant\frac{2SM}{\delta}\}$中．

对非线性离散大系统

$$x(\tau+1)=f(\tau,x(\tau)) \tag{7}$$

$x\in R^n$，$f:\mathrm{I}\times R^n\to R^n$关于$x$连续．$f(\tau+m,x)=f(\tau,x)$．设（7）能分解成如下形式的$S$个互联子系统$\delta_i$

$$x^{(i)}(\tau+1)=A_{ii}(\tau)x^{(i)}(\tau)+h_i(\tau,x(\tau))+R^{(i)}(\tau)\quad(i=1,\cdots,S) \tag{8}$$

其中$x^{(i)}(\tau)\in R^{n_i}$，$R^{(i)}(\tau)\in R^{n_i}$，$A_{ii}(\tau+m)=A_{ii}(\tau)$，$R^{(i)}(\tau+m)=R^{(i)}(\tau)$ $h_i:\mathrm{I}\times R^n\to R^{n_i}$表示子系统间的相互作用，$h_i(\tau+m,x)=h_i(\tau,x)$，形式为

$$h_i(\tau,x(\tau))=h_i(\tau,e_{i1}x^{(1)}(\tau),e_{i2}x^{(2)}(\tau),\cdots,e_{is}x^{(s)}(\tau)), \tag{9}$$

其中e_{ij}是$S\times S$阶互联矩阵的元．

$$h_i(\tau,x(\tau))=\sum_{j=1}^{s}e_{ij}h_{ij}(\tau,x^{(j)}(\tau)) \tag{10}$$

且$h_{ij}:\mathrm{I}\times R^{n_j}\to R^{n_i}$ 满足条件

$$|h_{ij}(\tau,x^{(j)}(\tau)|\leqslant\xi_{ij}|x^{(j)}(\tau)| \tag{11}$$

对任$(\tau,x^{(j)}(\tau))\in\mathrm{I}\times R^{n_j}$成立．且$\xi_{ij}\geqslant0$，则我们有

定理 5 在系统（8）中，若$\|A_{ii}(\tau)\|\leqslant A_{ii}$，$|R^{(i)}(\tau)|\leqslant M,\tau\in\mathrm{I},i=1,\cdots,S$（$A_{ii}>0,M>0$，为常量），$h_i(\tau,x(\tau))=\sum_{j=1}^{s}e_{ij}h_{ij}(\tau,x^{(j)}(\tau))$，且$h_{ij}(\tau,x^{(j)}(\tau))$满足（11）式，若存在$\delta>0$，使得$\max\limits_{1\leq j\leq S}(A_{jj}+\sum_{i=1}^{s}\bar{e}_{ij}\xi_{ij})\leqslant1-\delta$，则系统（8）在结构扰动下存在$m$—周期解．且位于有界域$\{x\,||x|\leqslant\frac{2SM}{\delta}\}$中．

证明 作李雅普诺夫函数$V^{(i)}(x^{(i)})=|x^{(i)}|$，$(i=1,\cdots,S)$，$V=\sum_{i=1}^{s}V^{(i)}$，

$$\triangle V^{(i)}|_{(8)}=|x^{(i)}(\tau+1)|-|x^{(i)}(\tau)|=|A_{ii}(\tau)x^{(i)}(\tau)+h_i(\tau,x(\tau))+R^{(i)}(\tau)|$$

$$-|x^{(i)}(\tau)|=|A_{ii}(\tau)x^{(i)}(\tau)+\sum_{j=1}^{s}e_{ij}h_{ij}(\tau,x^{(j)}(\tau)+R^{(i)}(\tau)-|x^{(i)}(\tau)|$$

$$\leqslant(A_{ii}-1)|x^{(i)}(\tau)|+\sum_{j=1}^{s}\bar{e}_{ij}\xi_{ij}|x^{(j)}(\tau)|+M$$

$$\triangle V|_{(8)}=\sum_{i=1}^{s}\triangle V^{(i)}|_{(8)}\leqslant\sum_{i=1}^{s}(A_{ii}-1)\,|x^{(i)}(\tau)|+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\bar{e}_{ij}\xi_{ij}|x^{(j)}(\tau)|+SM$$

$$=\sum_{j=1}^{s}(A_{jj}-1+\sum_{i=1}^{s}\bar{e}_{ij}\xi_{ij})\,|x^{(j)}(\tau)|+SM$$

$$\leqslant-\frac{\delta}{2}\sum_{j=1}^{s}|x^{(j)}(\tau)|+(-\frac{\delta}{2}\sum_{j=1}^{s}|x^{(j)}(\tau)|+SM).$$

当 $\sum_{j=1}^{s}|x^{(j)}(\tau)|\geqslant\frac{2SM}{\delta}$ 时，$\triangle V|_{(8)}\leqslant-\frac{\delta}{2}V$，

故由定理 2 和定理 3 知，系统（8）在结构扰动下存在m—周期解．且由 $|x(\tau)|\leqslant\sum_{j=1}^{s}|x^{(j)}(\tau)|$ 知，周期解在有界域 $\{x\,|\,|x|\leqslant\frac{2SM}{\delta}\}$中．

§ 3 非线性周期大系统之周期解的存在性

考虑线性迭代系统

$$x(\tau+1)=A(\tau)x(\tau)+R(\tau)\qquad(12)$$

$A(\tau)$为$n\times n$阶矩阵，$\tau\in\mathrm{I}$，$x\in R^{n}$，$R(\tau)\in R^{n}$，$A(\tau+m)=A(\tau)$，$R(\tau+m)=R(\tau)$．
若系统(12)具有分解

$$x^{(i)}(\tau+1)=\sum_{j=1}^{s}A_{ij}x^{(j)}(\tau)+R^{(i)}(\tau)\quad(i=1,\cdots,S),\qquad(13)$$

这里$x^{(i)}\in R^{n_i}$，$R^{(i)}(\tau)\in R^{n_i}$，$\tau\in\mathrm{I}$，$(i=1,\cdots,S)$，$\sum_{i=1}^{s}n_i=n$，$A_{ij}(\tau)$是$n_i\times n_j$阶矩阵，$A_{ij}(\tau+m)=A_{ij}(\tau)$，$R^{(i)}(\tau+m)=R^{(i)}(\tau)$，$i,j=1,\cdots,S$．

(12)所对应的齐次方程

$$x(\tau+1)=A(\tau)x(\tau)\qquad(14)$$

具有相应的分解

$$x^{(i)}(\tau+1)=\sum_{j=1}^{s}A_{ij}x^{(j)}(\tau),\quad i=1,\cdots,S.\qquad(15)$$

设 $\|A_{ij}(\tau)\|\leqslant A_{ij}$，$|R^{(i)}(\tau)|\leqslant M$，则有

定理 6 若系统(13)满足$\|A_{ij}(\tau)\|\leqslant A_{ij}$，$|R^{(i)}(\tau)|\leqslant M$，且存在$\delta>0$，使得 $\max\limits_{1\leq j\leq S}\sum_{i=1}^{s}A_{ij}\leqslant1-\delta$，则系统(12)存在唯一稳定的$m$—周期解．位于有界域$\{x\,|\,|x|\leqslant\frac{2SM}{\delta}\}$ 中，且(12)的所有其它解都收敛于它．

证明 作李雅普诺夫函数$V^{(i)}(x^{(i)})=|x^i|$，$V=\sum_{i=1}^{s}V^{(i)}$，则

$$\triangle V|_{(13)}=\sum_{i=1}^{s}\triangle V_{(13)}^{(i)}=\sum_{i=1}^{s}[\,|\sum_{j=1}^{s}A_{ij}(\tau)x^{(j)}(\tau)+R^{(i)}(\tau)|-|x^{(i)}(\tau)|\,]$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{s}[\sum_{j=1}^{s}A_{ij}|x^{(j)}(\tau)|+M-|x^{(i)}(\tau)|\,]\leqslant\sum_{j=1}^{s}[\sum_{i=1}^{s}A_{ij}|x^{(j)}(\tau)|-|x^{(j)}(\tau)|\,]+SM$$

$$= \sum_{j=1}^{s} [(\sum_{i=1}^{s} A_{ij}) - 1] |x^{(j)}(\tau)| + SM \leqslant -\delta \sum_{j=1}^{s} |x^{(j)}(\tau)| + SM.$$

当 $\sum_{j=1}^{s}|x^{(j)}(\tau)| \geqslant \frac{2SM}{\delta}$ 时，$\triangle V|_{(13)} \leqslant -\frac{\delta}{2}V$.

同定理 4 的证明类似知，(12) 存在 m—周期解，且位于有界域 $\{x \mid |x| \leqslant \frac{2SM}{\delta}\}$ 内. 又由

$$\triangle V|_{(15)} = \sum_{i=1}^{s} [|\sum_{j=1}^{s} A_{ij}(\tau) x^{(j)}(\tau)| - |x^{(i)}(\tau)|] \leqslant \sum_{i=1}^{s} [\sum_{j=1}^{s} A_{ij} |x^{(j)}(\tau)| - |x^{(i)}(\tau)|]$$

$$= \sum_{j=1}^{s} [(\sum_{i=1}^{s} A_{ij}) - 1] |x^{(j)}(\tau)| \leqslant -\delta \sum_{j=1}^{s} |x^{(j)}(\tau)|.$$

故由 [3] 中的定理 1 知，(14) 的所有解都收敛于零. 则任给 (12) 的两解 $x(\tau)$ 和 $\varphi(\tau)$，$x(\tau) - \varphi(\tau)$ 为 (14) 的解且收敛于零，故知 (12) 的 m—周期解唯一，且所有其它解都收敛于它.

对于非线性系统

$$x(\tau+1) = f(\tau, x(\tau)), \tag{7}$$

若有分解

$$x^{(i)}(\tau+1) = A_{ii}(\tau) x^{(i)}(\tau) + h_i(\tau, x(\tau)) + R^{(i)}(\tau) \quad (i = 1, \cdots, S), \tag{8}$$

$x^{(i)} \in R^{n_i}$，$R^{(i)}(\tau) \in R^{n_i}$，$A_{ii}(\tau)$ 为 $n_i \times n_i$ 阶矩阵，$h_i: \mathrm{I} \times R^n \to R^{n_i}$，$A_{ii}(\tau+m) = A_{ii}(\tau)$，$R^{(i)}(\tau+m) = R^{(i)}(\tau)$，$h_i(\tau, x) = h_i(\tau+m, x)$，若

$$|h_i(\tau, x(\tau))| \leqslant \sum_{j=1}^{s} \xi_{ij} |x^{(j)}(\tau)| \tag{16}$$

对任 $(\tau, x(\tau)) \in \mathrm{I} \times R^n$ 成立 ($\xi_{ij} \geqslant 0$ 为常数)，则类似于以上讨论，得到

定理 7 若在 (8) 式中 $\|A_{ii}(\tau)\| \leqslant A_{ii}$，$|R^{(i)}(\tau)| \leqslant M$，$|h_i(\tau, x(\tau))| \leqslant \sum_{j=1}^{s} \xi_{ij} |x^{(j)}(\tau)|$

若存在 $\delta > 0$，使得

$$\max_{1 \leq j \leq S} (A_{jj} + \sum_{i=1}^{s} \xi_{ij}) \leqslant 1 - \delta,$$

则系统 (7) 存在唯一稳定的 m—周期解，且位于有界域 $\{x \mid |x| \leqslant \frac{2SM}{\delta}\}$ 中.

参 考 文 献

[1] T. Yoshizawa, Stability Theory and the Existence of Periodie Solutions and Almost Periodie Solutions, Springer-Verlag, 1975年.

[2] 王联、王慕秋等，离散动力系统的稳定性，天津科技出版社（待出版）.

[3] 王慕秋、王联，离散大系统在结构扰动下的稳定性. 河南师范大学学报，1987年第1期 1—9 页.

[4] James Hurt, Some stability theorems for ordinary difference equations, SIAM J. Numer. Anal., Vol 4, No4, 1967.

The Existence of Periodic Solutions of Large-scale Discrete Systems under Structural Perturbations

Wang Muqiu, Wang Lian

(Institute of Mathematics, Academia, Sinica)

Cui Xuemei

(Department of Mathematics, He'nan Normal University)

Abstract

The stability of Large-scale discrete systems has been deeply studied for recent years, the study of their periodic solutions, however , remains untouched. The dissertation firstly considers the boundness of solutions of large-scale discrete systems. It is proved in this paper there exists a periodic solution if the solutions of the difference equation with periodic coefficients are ulfimate bounded. Using the method of Liapunov functions, the dissertation then studies the existence of periodic solutions of Large-scale discrete systems under structural perturbations and steady state oscillafions of large-scale discrete systeme.