1988年11月

数学研究与评论
第八卷 第四期

多元泛复函与重积分*

—泛复变函数之Ⅳ

熊锡金

（吉林通化师范学院）

作为一种特殊的赋范环微积[1]，而比广义超复变函数[2,3]更为丰富广泛的泛复变函数数[4—6]，不但在数学中导出了一些新的结果，如[6]中的新型边值问题等引起了大家的兴趣．而且，作为一种新的工具，也在物理和力学中显示了它的作用，得到了许多新的物理结论[7]，从而对揭开物理中许多迷惘现象的面纱提供了新的途径．这些也显示了泛复变函数这一新数学方向的生命力．不断地充实发展这一领域是很有必要的．

本文引入了一些新的概念，初步研究了多元泛复函．在这过程中导出了一些偏微分方程的显解．这些方程用通常的方法解是有困难的．也初步研究了泛复变函数的重积分．且导出了广泛意义下的Guass定理．它是R^n上Guass公式的一种推广．陈省身先生曾指出："所有已知流形的整体结果的极大多数是同偶维相关的"，"奇维流形至今还是神秘的"[8]．本文最后，在例子中还给出了一个有趣的结果：在奇数维的单位泛复空间中，其解析函数Guass积分为零因子．

一、广域的积与泛复数

广域扩张可以用添加来实现[4]，也可以利用熔合的办法来进行．下面我们引入两种扩张的方法，它们相似于物质的混合与化合．

实域上的两个广域：E 的基为$(e_1,e_2,\cdots,e_m)$，F 的基为$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$．

定义1 设G是用E和F的基直接组合为基$(g_1,g_2,\cdots,g_{mn})=(e_1f_1,e_1f_2,\cdots,e_mf_n)$所构成的广域．则称G为E和F的广域直积．记为：$G=E\times F$，或：

$(g_1,g_2,\cdots,g_{mn})=(e_1,e_2,\cdots,e_m)\times(f_1,f_2,\cdots,f_n)=(e_1f_1,e_1f_2,\cdots,e_mf_n)$．

显然G的维数为E和F维数之积．G中的乘法分别保留E和F内的乘法，为两者的综合．而E和F的基之间没有乘法，仅组成新基．

定义2 广域E和F的基之间存在着共同的乘法，即它们基之间可以进行乘法运算．G的基为$(g_1,g_2,\cdots,g_h)$．它们是由E和F的基进行乘法运算所得．则称G为E和F的广域交积．记为：$G=E\otimes F$，或：$(g_1,g_2,\cdots,g_h)=(e_1,e_2,\cdots,e_m)\otimes(f_1,f_2,\cdots,f_n)$．

一般G的维数$h\leqslant m\times n$，除非另定义E和F基之间的乘法，并进行添加．

* 1986年2月12日收到．

例如，抛物椭圆数与双曲椭圆数，直积为16维：

$$(1,i,k,ik)\times(1,i,j,ij)=(1,i_1,k,i_1k)\times(1,i_2,j,i_2j)$$
$$=(1,i_1,i_2,k,j,i_1k,i_1j,\cdots,i_1i_2jk).$$

交积为8维：

$$(1,i,k,ik)\otimes(1,i,j,ij)=(1,i,j,k,ik,ij,jk,ijk).$$

这两种积的差别在于两种数内椭圆基之间是否存在乘法运算，扩张后基的乘法沿用原数中的．如 $i_1j\times i_1i_2jk=-i_2k$，$ijk\otimes ij=-k$ 等．

扩张后G为直积或交积均可时，用“·”号表示．即E·F＝G 或简记EF＝G表示E×F或E⊗F均可．

定义3 如果一个广域是Banach代数则称它为泛复数．

例1 空间S(e)[4]是泛复数，它的直积或交积也是泛复数．

记n个S(e)的广域直积为S^n，固其构成新的S$^*(e)$，它的范数可按S$^*(e)$中范数定义方法得到．S(e)的交积乘幂仍为其自身，但作为空间形式仍应区别地记为S$^n(e)$．正如复域C的广域交积为自身，但形成的高维复空间为C^n．

例2 关于整数n的剩余类环是广域，但不是Banach代数，因此不是泛复数．

例3 以$1,e,e^2,\cdots,e^n,\cdots$为基．非实元基$e$满足示性方程：$\sin e=0$．元素：

$$a=\sum_{i=0}^{\infty}a_ie^i$$ 当 a_i 为实数时构成泛复数．

可定义范数 $\|a\|=\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|$，易验证它满足Banach代数对范数的要求．

这种泛复数有无穷多实域线性无关的零因子：$\theta_i=\sin e/\sin\dfrac{e}{2^i}$ $(i=1,2,\cdots)$ 且有$\theta_i\theta_j=0$ $(i\neq j)$．

例4 区域G上的复变解析函数$f(z)$．范数可定义为$\|f(z)\|=|f(z)|$．将函数值可为零的视为零因子则也构成广域．按上述范数也构成Banach代数，因此它是一种无穷维的泛复数．

二、多元泛复变解析函数

设G$_\sigma$为泛复数空间$z_\sigma\in$G$_\sigma$ $(\sigma=1,2,\cdots,k)$，记G为G$_\sigma$的直积，$\widetilde{\mathrm{G}}$为G$_\sigma$的交积．$Z=(z_1,z_2,\cdots,z_k)$．

定义4 映射$F(z)$：G$\to\widetilde{\mathrm{G}}$叫做$k$元泛复变函数．

如S(e)中变元$z_\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n}\zeta_{\sigma,i}e_i$，其中$\zeta_{\sigma,i}$为$m$个独立实变量的可微实函$\zeta_{\sigma,i}=\zeta_{\sigma,i}(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，形成的多元泛复函$F(z)$：S$^k(e)\to$S$(e)$．

定义5 如果z_σ不沿零因子方向趋于z_σ^0时，下列极限存在且唯一，称多元泛复函$F(z)$在$Z^0=(z_1^0,z_2^0,\cdots,z_k^0)$是可导的．在$Z^0$及其邻域可导的$F(z)$，称为在$Z^0$解析的．

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z_\sigma}=\lim_{\|z_\sigma-z_\sigma^0\|\to0}\frac{F(z_1^0,\cdots,z_\sigma,\cdots,z_k^0)-F(z_1^0,\cdots,z_\sigma^0,\cdots,z_k^0)}{z_\sigma-z_\sigma^0}\quad(\sigma=1,2,\cdots,k).$$

对于$S^k(e)$中区域D上的泛复解析函数：$F(z)=\sum_{\mu=1}^{n} f_\mu e_\mu$ 我们有：

定理 1 若其独立实变量x_ν为m个，则当$m\geqslant k+1$时$F(z)$的分量f_μ必须满足相应的一组广义CR方程组（2）.

证明 因为F解析而z_σ均可微．因此有：

$$\frac{\partial F}{\partial x_\nu}=\frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_\nu}+\frac{\partial F}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial x_\nu}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial x_\nu}\quad(\nu=1,2,\cdots,m) \tag{1}$$

当$m\geqslant k+1$时，我们可以任选（1）中$k+1$个等式，由于$\frac{\partial F}{\partial z_\sigma}(\sigma=1,2,\cdots,k)$存在且唯一，因而有：

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_\lambda}, & \frac{\partial z_1}{\partial x_\lambda}, & \frac{\partial z_2}{\partial x_\lambda}, & \cdots, & \frac{\partial z_k}{\partial x_\lambda} \\ \frac{\partial F}{\partial x_\mu}, & \frac{\partial z_1}{\partial x_\mu}, & \frac{\partial z_2}{\partial x_\mu}, & \cdots, & \frac{\partial z_k}{\partial x_\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_\nu}, & \frac{\partial z_1}{\partial x_\nu}, & \frac{\partial z_2}{\partial x_\nu}, & \cdots, & \frac{\partial z_k}{\partial x_\nu} \end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

将$F(z)$及z_σ进行分蘖，$F(z)=\sum_{\mu=1}^{n} f_\mu e_\mu$，$z_\sigma=\sum_{\lambda=1}^{n}\zeta_{\sigma,\lambda}e_\lambda$，则式（2）也有$n$个分蘖．即$f_\mu$满足$m$个自变量$n$个未知函数$n$个方程的偏微分方程组．

当$m=k+1$时，选择方法唯一，因而方程是确定的．当$m>k+1$时，上述$k+1$个等式选取方法增多，因而f_μ将满足一组个数为$\frac{nm(m-1)\cdots(m-k)}{(k+1)!}$的超定方程组．当$m>k+1$时，由于$z_\mu$间有一定的相关性，$f_\mu$满足的方程不再对任意解析函数$F$都成立，而与$F$的具体形式有关．讨论从略．

当z_σ为x的线性变元时（2）式较简单，但当z_σ为$(x_1,x_2,\cdots,x_m)$的任意可微实函时则较为复杂．

例 5 $m=2,k=1,z=x+iy$时，$F=u+iv$，（2）式为：$\begin{vmatrix}\partial(u+iv)/\partial x, & 1\\ \partial(u+iv)/\partial y, & i\end{vmatrix}=0$，即为单复变函数（椭圆复函）的CR方程：$u_x=v_y$，$u_y=-v_x$．同理也可得多复变函数满足的广义CR方程．

例 6 利用实二维广域扩张．示性方程为$e^2=\lambda$．($\lambda\in R$)．独立实变量x,y,z．中间广域变量$\eta_1=\varphi+\psi e$，$\eta_2=\xi+\zeta e$．其中φ、ψ、ξ、ζ为x、y、z的可微实函．则$F(\eta_1,\eta_2)=u+ev$，满足：

$$\begin{vmatrix} u_x+v_xe, & \varphi_x+\psi_xe, & \xi_x+\zeta_xe \\ u_y+v_ye, & \varphi_y+\psi_ye, & \xi_x+\zeta_xe \\ u_z+v_ze, & \varphi_z+\psi_ze, & \xi_x+\zeta_ze \end{vmatrix}=0\text{，即}$$

$$\begin{aligned} A_1u_x+B_1u_y+C_1u_z+D_1v_x+E_1v_y+F_1v_z=0, \\ A_2u_x+B_2u_y+C_2u_z+D_2v_x+E_2v_y+F_2v_z=0, \end{aligned} \tag{3}$$

其中系数为φ,ψ,ξ,ζ的组合．如 $A_1=\varphi_y\xi_z+\lambda\psi_y\zeta_z-\varphi_z\xi_y-\lambda\psi_z\zeta_y$ 等．其约束还是较大的．但如果给出：

$$\varphi=a_1x+\beta_1y+\gamma_1z;\qquad \psi=a_2x+\beta_2y+\gamma_2z;$$
$$\xi=a_3x+\beta_3y+\gamma_3z;\qquad \zeta=a_4x+\beta_4y+\gamma_4z.$$

选择λ,a_i、β_i、γ_i 则 u 及 v 尚可满足一般常系数方程组（3）．对于更一般多个自变量，多个未知函数常系数一阶齐次方程组，也可有类同的结果．

三、形 式 重 积 分

对于多元泛复变函数可以引入如下的重积分：设l_i为泛复数空间S_i中的曲线．$z_i\in l_i$（$i=1,2,\cdots,n$）．

定义 6 重积分

$$I=\int\limits_V\cdots\int f(z)\,dv=\int\limits_V\cdots\int f(z_1,z_2,\cdots,z_n)\,dz_1dz_2\cdots dz_n$$

是指每一重积分在泛复数空间S_i中沿曲线l_i的一次积分．这时仅将其它变量视为参数．

易证这种"形式重积分"具有实域中重积分的许多相似性质．若用参数表示曲线$l_1=l_1(t_1)$，$l_2=l_2(t_2),\cdots,l_n=l_n(t_n)$，则超曲面为$V=V(t_1,t_2,\cdots,t_n)$．设$e_1,e_2,\cdots,e_m$是$S_1\cdot S_2\cdot\cdots\cdot S_n$在实域上的基，则$V=\sum\limits_{k=1}^{m}V_k(t_1,t_2,\cdots,t_n)e_n$为一组实超曲面$V_k$．

由于S_i积的多样性重积分可有多种形式，例如：

1. $S_1,S_2,\cdots,S_n$各异．重积分可为映射I：$S_1\times S_2\cdots\times S_n\to S_1\otimes S_2\cdots\otimes S_n$．

2. z均属同一泛复数空间S时，则变成I：$S^n\to S$．

当$z_1=z_2=\cdots=z_n$时，则积分可变成单变量的n阶积分I：$S\to S$．

$$I=\int\cdots\int f(z)\,dz^n.$$

这时对上限为变量z的不定积分有I的n阶微商：$I^{(n)}=f(z)$．定积分则和l_i的$2n$个端点有关．和曲线l_i本身无关．

3．$S_1,S_2,\cdots S_n$各异．I可为映射I：$S_1\times S_2\cdots\times S_n\to S_1\times S_2\cdots\times S_n$．上限为变量时也可成为不定积分．当上、下限为定值时，可变成超曲面$V=l_1\times l_2\cdots\times l_n$上的多重积分．这种定积分也仅与$l_i$的$2n$个端点有关．

4．I中的dv仅由$dx_1dx_2\cdots dx_m$构成实域微分．这时将$f(z)$分蘖后$f(z)=\sum\limits_{\mu=1}^{n}f_\mu e_\mu$，$I$可看成由$n$个实积分构成分量的积分：

$$I=\int\limits_V\cdots\int f(z)\,dv=\sum_{\mu=1}^{n}e_\mu\int\limits_V\cdots\int f_\mu dv$$

除上述外还可有一些特殊情况，从略．

关于重积分，我们可有S（e）中泛复函重积分的广义 Остроградский－Guass公式．设σ是实n维超曲面V的边界．a_i是σ法线在x_i方向的方向余弦．e_i为S（e）在实域上的基．并记：

$$\nabla_n=e_1\frac{\partial}{\partial x_1}+e_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+e_n\frac{\partial}{\partial x_n},\quad a=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n.$$

定理 2 对S(e)中V上连续函数$f(z)$，有

$$\int_{\mathrm{V}}\cdots\int \nabla_n f(z)\,\mathrm{d}v=\int_{\partial\mathrm{V}=\sigma}\cdots\int a f(z)\,\mathrm{d}\sigma .$$

证明 因 $\displaystyle\int_{\mathrm{V}}\cdots\int \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\mathrm{d}v=\int_{\sigma}\cdots\int a_i u_j\,\mathrm{d}\sigma,$

$$\int_{\mathrm{V}}\cdots\int \nabla_n f(z)\,\mathrm{d}v=\int_{\mathrm{V}}\cdots\int \left(e_1\frac{\partial}{\partial x_1}+e_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+e_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)(u_1e_1+u_2e_2+\cdots+u_ne_n)\,\mathrm{d}v$$

$$=\sum_{i,j,k}\int_{\mathrm{V}}\cdots\int e_k\cdot\gamma_{i,j,k}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\mathrm{d}v=\sum_{i,j,k}\int_{\sigma}\cdots\int e_k\gamma_{i,j,k}a_iu_j\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{\sigma}\cdots\int (a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n)(u_1e_1+u_2e_2\cdots+u_ne_n)\,\mathrm{d}\sigma=\int_{\sigma}\cdots\int a f(z)\,\mathrm{d}\sigma$$

其中$\gamma_{i,j,k}$为S(e)的基的乘法的代数结构常数[4].

这一公式可推广至积分区域V是S(e)中的区域即$V=V_1e_1+V_2e_2+\cdots+V_ne_n$，$\sigma=\sigma_1e_1+\sigma_2e_2+\cdots+\sigma_ne_n$ 的情况．证法相同．

当$n=3$，$e_ie_j=\delta_{ij}$时此公式即为通常的Остроградский－Guass公式．

例 对实域上添加元基e，示性方程为：$e^n=1$ 即 $(e-1)\cdot(\sum_{i=0}^{n-1}e^i)=0$ 所形成的n维广域可称为"n次单位泛复数"．设其中变量为：$\eta=x_0+x_1e+x_2e^2+\cdots+x_{n-1}e^{n-1}$，函数为：$f(\eta)=u_0+u_1e+u_2e^2+\cdots+u_{n-1}e^{n-1}$，其中$u=u(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n)$．

对解析泛函有：

$$f'(\eta)=\frac{\partial f(\eta)}{\partial x_je^j}=\frac{\partial f(\eta)}{\partial x_ke^k}\qquad(j,k=0,1,\cdots,n-1),$$

因此，

$$\int_{\sigma}\cdots\int a f(\eta)\,\mathrm{d}\sigma=\int_{\mathrm{V}}\cdots\int \nabla_n f(\eta)\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_{\mathrm{V}}\cdots\int\left(\frac{\partial}{\partial x_0}+e\frac{\partial}{\partial x_1}+e^2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+e^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)(u_0+u_1e+\cdots+u_{n-1}e^{n-1})\,\mathrm{d}v$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{n-1}e^{2i}\right)\int_{\mathrm{V}}\cdots\int\left[\left(\partial\sum_{i=0}^{n-1}u_ie^i\right)/(\partial x_je^j)\right]\mathrm{d}v=\sum_{i=0}^{n-1}e^{2i}\int_{\mathrm{V}}\cdots\int f'(\eta)\,\mathrm{d}v.$$

当n为奇数时，由示性方程$e^n=1$ 可得：$\sum_{i=0}^{n-1}e^{2i}=\sum_{i=0}^{n-1}e^i$ 为零因子．因此在奇数维n次单位泛复数空间中有：

$$(e-1)\int_{\sigma}\cdots\int a f(\eta)\,\mathrm{d}\sigma=(e-1)\int_{\mathrm{V}}\cdots\int\nabla_n f(\eta)\,\mathrm{d}v=0.$$

参 考 文 献

[1] 吴学谋，模糊数学，1981，1，15—20.
[2] Gilbert, R. P. & Hile, G., Trans. Amer. Math. Soc. 1974, 195, No.468, 1—30.
[3] Begehr, H. & Gilbert, R. P., Appl. Anal. 1977, 6, 189—205.
[4] 熊锡金，武汉大学学报，1980，1.26—39. 1981，4，31—38.
[5] 熊锡金，科学通报，25(19)，1980，870—872.
[6] 熊锡金，科学探索，1985，3.
[7] 熊锡金，应用数学和力学，2(5)，1981，549—556.
[8] 陈省身，自然杂志，2(8)，1979，473—478.

Severl Hypercomplex Functionals and It's Iterated Integral

Xong Xijin

Abstract

This article gives the definitions of the hupercomplex numbers, several hypercomplex functionals at ils iterated Intgral. It also makes some of simple researching for then and gets a few of interesting and important characters of then. For example,

Theorem Ⅰ The several hypercomplex functional

$$F(z)=F(z_1, z_2, \cdots, z_k)=\sum_{\mu=1}^{n} f_\mu e_\mu,$$

there $z_i=z_i(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $x \in \mathbf{R}$. If $m \geqslant k+1$, then f_μ will meet the neele of generalized CR equality:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_\lambda} & \frac{\partial z_1}{\partial x_\lambda} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial x_\lambda} \\ \frac{\partial F}{\partial x_\mu} & \frac{\partial z_1}{\partial x_\mu} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial x_\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_\nu} & \frac{\partial z_1}{\partial x_\nu} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial x_\nu} \end{vmatrix} = 0 .$$

When $m=2, k=1, z=x+iy, F=u+iy$, then It is CR equality.

Theorem Ⅱ Generalized Osterogradski-Guass equality:

$\int_V \cdots \int \nabla_n f(z)\,dv=\int_{\partial V=\sigma} \cdots \int a f(z)\,d\sigma$, Where $\nabla_n = e_1\frac{\partial}{\partial x_1}+e_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+e_n\frac{\partial}{\partial x_n}$, $a=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$, a_i is direction cosine of σ on x_i. If $n=3, e_ie_j=\delta_{ij}$, then It is Osterogradski Guass equality.