1988年11月

数学研究与评论
第八卷 第四期

关于Fourier级数L^1收敛的Tauberian定理

盛 淑 云
（杭 州 大 学）

提 要

文献[1]，[2]连续发表了关于Fourier级数L^1收敛的若干Tauberian定理．本文指出：文[2]中的定理2.1．2.2的条件$[\frac{n}{l_n}]^{-1}\sum_{k=n}^{n+[n/l_n]}|\hat{f}(k)-\hat{f}(-k)|\lg k=o(1)$ $(n\to\infty)$是多余的． 文[1]中的类似条件$\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\lambda n}|[\hat{f}(k)-\hat{f}(-k)]|\lg k=o(1)$也是多余的．相应地这些定理的推论都可得到改进．

一、引 言

我们知道定义在全实轴上，以2π为周期的一切复值Lebesgue可积函数$L^1(T)$ $(T=R/2\pi Z)$构成Banach空间．设$f\in L^1(T)$的Fourier级数的部分和为

$$S_n(f)=S_n(f,x)=\sum_{|k|\le n}\hat{f}(k)e^{ikx}\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

下面以$\|\cdot\|$表示$L^1(T)$空间的范数．记$\mathscr{L}=\{l_n|l_n=o(n),l_n\to\infty\ (n\to\infty)\}$；$n_l=[\frac{n}{l_n}]$，

$H(n)=n+n_l$；$E_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}$ $(n=1,2,\cdots)$，$E_0(x)=\frac{1}{2}$；以及

$$\mathscr{E}=\{f|l_n\in\mathscr{L},\ \sum_{k=n}^{H(n)}\left|(\Delta\hat{f}(k)-\triangle\hat{f}(-k)\right|\lg k=o(1),\ n\to\infty\},$$

$$\mathscr{E}^*=\{f|\lim_{\lambda\to1+0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=n}^{[\lambda n]}\left|\triangle\hat{f}(k)-\triangle\hat{f}(-k)\right|\lg k=0\},$$

$$\mathscr{G}=\{f|l_n\in\mathscr{L}.\ \|\sigma_{H(n)}-\sigma_n\|l_n=o(1),\ n\to\infty\},$$

其中$\sigma_n=\sigma_n(f,x)$是$S_n(f,x)$的Fejer平均，

$$\mathrm{R}=\{f|l_n\in\mathscr{L},\ \frac{1}{n_l}\sum_{k=n}^{H(n)}\left|\hat{f}(k)-\hat{f}(-k)\right|\lg k=o(1),\ n\to\infty\},$$

$$\mathrm{R}^*=\{f|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\hat{f}(h)-\hat{f}(-k)\right|\lg k=o(1),\ n\to\infty\}.$$

我们知道

定理A[1] 设$S(f)\sim\sum_{|n|<\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$是$f\in\mathrm{R}^*\mathscr{E}^*$的Fourier级数，若对$1<p\le2$

---

* 1985年8月2日收到．

$$\lim_{\lambda\to 1+0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=n}^{[\lambda n]}k^{p-1}|\triangle\hat{f}(k)|^p=0, \tag{1.1}$$

则 $$\|S_n(f,x)-f(x)\|=o(1)\Leftrightarrow\|\hat{f}(n)E_n(x)+\hat{f}(-n)E_{-n}(x)\|=o(1). \tag{1.2}$$

定理B[2] 在定理A的条件下

$$\|S_n(f,x)-f(x)\|=o(1)\Leftrightarrow\hat{f}(n)\lg|n|=o(1)\ (|n|\to\infty). \tag{1.3}$$

定理C[2] 设$S(f)=\sum_{|n|<\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$是$f\in R\mathscr{E}g$的Fourier级数．若对某一$p\in(1,2]$满足条件

$$l_n^{-1/p}\{\sum_{k=n}^{H(n)}k^{p-1}|\triangle\hat{f}(k)|^p\}^{1/p}=o(1)\ (n\to\infty),\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{1.4}$$

则 $$\|S_n(f,x)-f(x)\|=o(1)\Leftrightarrow\hat{f}(n)\lg(|n|/l_{|n|})=o(1)\ (|n|\to\infty). \tag{1.5}$$

定理D[2] 设$S(f)\sim\sum_{|n|<\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$是$f\in R\mathscr{E}$的Fourier级数，对某一$p\in(1,2]$满足条件(1.4)，且$\hat{f}(n)\lg(|n|/l_{|n|})=o(1)\ (|n|\to\infty)$，则

$$\|S_n(f,x)-f(x)\|=o(1)\ (n\to\infty)\Leftrightarrow f\in g. \tag{1.6}$$

这些定理是许多实值函数的Fourier级数L^1收敛的发展与推广，见[3][4]．

本文将证明定理A、B中的条件$f\in R^*\mathscr{E}^*$可以减轻为$f\in\mathscr{E}^*$，定理C中的条件$f\in R\mathscr{E}g$可以减轻为$f\in\mathscr{E}g$. 定理D中的条件$f\in R\mathscr{E}$可以减轻为$f\in\mathscr{E}$．相应地一些推论都可以得到改进．

二、几个引理

引理1[2] 设$\{C_n\}\subset C$，记$T_n=(\frac{l_n}{n}\pi,2\pi-\frac{l_n}{n}\pi)$；$l_n\in\mathscr{L}$，则$\int_{T_n}|C_nE_n(x)+C_{-n}E_{-n}(x)|dx=o(1)\ (n\to\infty)$的充要条件是$C_n\lg(|n|/l_{|n|})=o(1)\ (|n|\to\infty)$．

引理2[2] 设$\{C_n\}\subset C$，$N>n$，$1<p\leqslant 2$，则

$$\int_{\frac{\pi}{\sqrt{-n}}}^{\pi}\left|\sum_{k=n}^{N}C_kD_n(x)\right|dx\leqslant A_p(N-n)^{1/q}(\sum_{k=n}^{N}|C_k|^p)^{1/p},$$

其中A_p是与p有关的绝对常数，$q=\frac{p}{p-1}$，$D_k(x)$是迪里克莱核．

引理3 设$\hat{f}(n)$是$f\in L^1(T)$的Fourier系数，则

$$\frac{1}{H(n)-n}\int_{T_n}\left|\sum_{k=n+1}^{H(n)-1}(\hat{f}(k+1)E_k(x)+\hat{f}(-k-1)E_{-k}(x))\right|dx=o(1)\ (n\to\infty).$$

证明 易见$E_k(x)+E_{-k}(x)=2D_k(x)$．由此不难算得

$$\frac{1}{H(n)-n}\int_{T_n}\left|\sum_{k=n+1}^{H(n)-1}\hat{f}(k+1)E_k(x)+\hat{f}(-k-1)E_{-k}(x)\right|dx$$

$$=\frac{2}{H(n)-n}\int_{\frac{l_n}{n}\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=n+1}^{H(n)-1}(\hat{f}(k+1)+\hat{f}(-k-1))D_k(x)\right|dx\triangleq J_n.$$

于是

$$J_n \leqslant \frac{2}{H(n)-n}\left\{\int_{\frac{l}{n}\pi}^{\pi}\frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right\}^{1/2}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=n+1}^{H(n)-1}[\hat{f}(k+1)+\hat{f}(-k-1)]\sin(k+\frac{1}{2})x\right|^2\right\}^{1/2}$$

$$=O\{(H(n)-n)^{-\frac{1}{2}}[\sum_{k=n+1}^{H(n)-1}|(\hat{f}(k+1)+\hat{f}(-k-1)|^2]^{\frac{1}{2}}\}=O\{\max_{n+1\leq|k|\leq H(n)-1}|f(k+1)|\}=o(1).$$

三、定理与推论

定理 1 设$S(f)\sim\sum_{|n|<\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$是$f\in\mathscr{E}$g的Fourier级数，若对$1<p\leqslant 2$满足条件(1.4)、则(1.5)成立.

证明 记 $\tau_{H(n),n}=\frac{1}{H(n)-n}\sum_{k=n}^{H(n)-1}S_k(f,x)$，利用Abll变换，经计算得到:

$$\tau_{H(n),n}-S_n(f,x)=\frac{1}{H(n)-n}\sum_{k=n}^{H(n)-1}(H(n)-k)[\hat{f}(k)e^{ikx}+\hat{f}(-k)e^{-ikx}]$$

$$=\frac{1}{H(n)-n}\sum_{k=n}^{H(n)}(H(n)-k))[\triangle\hat{f}(k)E_k(x)+\triangle\hat{f}(-k)E_{-k}(x)]$$

$$+\frac{1}{H(n)-n}\sum_{k=n+1}^{H(n)-1}[\hat{f}(k+1)E_k(x)+\hat{f}(-k-1)E_{-k}(x)]$$

$$-[\hat{f}(n)E_n(x)+\hat{f}(-n)E_{-n}(x)]. \tag{3.1}$$

于是

$$\int_{T_n}|\tau_{H(n),n}(f,x)-S_n(f,x)|dx\leqslant\frac{1}{H(n)-n}\int_{T_n}\Big|\sum_{k=n}^{H(n)}(H(n)-k)[\triangle\hat{f}(k)E_k(x)$$

$$+\triangle\hat{f}(-k)E_{-k}(x)]\Big|dx+\frac{1}{H(n)-n}\int_{T_n}\Big|\sum_{k=n+1}^{H(n)-1}(\hat{f}(k+1)E_k(x)+\hat{f}(-k-1)E_{-k}(x))\Big|dx$$

$$+\int_{T_n}|\hat{f}(n)E_n(x)+\hat{f}(-n)E_{-n}(x)|dx=I_1+I_2+I_3 \tag{3.2}$$

由于

$$\sum_{k=n}^{H(n)}(H(n)-k)[\triangle\hat{f}(k)E_k(x)+\hat{f}(-n)E_{-n}(x)]$$

$$=O\left\{\left|\sum_{k=n}^{H(n)}(H(n)-k)(\triangle\hat{f}(k)-\triangle\hat{f}(-k))E_k(x)\right|+\left|\sum_{k=n}^{H(n)}(H(n)-k)\triangle\hat{f}(k)D_k(x)\right|\right\}, \tag{3.3}$$

以及

$$\|E_n(x)\|=O(\lg n)\quad x\in T_n,$$

故得

$$I_1=C\{\frac{1}{H(n)-n}\int_{T_n}\sum_{k=n}^{H(n)}(H(n)-k)|\triangle\hat{f}(k)-\triangle\hat{f}(-k)|\lg k dx$$

$$+\frac{1}{H(n)-n}\int_{T_n}(H(n)-k)\left|\sum_{k=n}^{H(n)}\triangle\hat{f}(k)D_k(x)\right|dx=I_{11}+I_{12} \tag{3.4}$$

由条件$f\in\mathscr{E}$得

$$I_{11}=o(1). \tag{3.5}$$

由引理 2 以及条件(1.4)得

$$I_{12}=\frac{1}{H(n)-n}\int_{T_n}\left|\sum_{k=n}^{H(n)}(H(n)-k)\triangle\hat{f}(k)D_k(x)\right|dx$$

$$=O\{(H(n)-n)^{-1+(1/q)}[\sum_{k=n}^{H(n)}(H(n)-k)^p|\triangle\hat{f}(k)|^p]^{1/p}\}$$

$$=O\{(l_n)^{-(1/q)}[\sum_{k=n}^{H(n)}n^{p/q}|\triangle\hat{f}(k)|^p]^{1/p}\}$$

$$=O\{(l_n)^{-(1/q)}[\sum_{k=n}^{H(n)}k^{p-1}|\triangle\hat{f}(k)|^p]^{1/p}\}=o(1). \tag{3.6}$$

在条件 $\hat{f}(n)\lg(|n|/l_{|n|})=o(1)$ 的情况下，显然有

$$I_2=\frac{1}{H(n)-n}\int_{T_n}\left|\sum_{k=n+1}^{H(n)-1}(\hat{f}(k+1)E_n(x)+\hat{f}(-k-1)E_{-k}(x))\right|dx=o(1) \tag{3.7}$$

再利用引理1, 得

$$I_3=\int_{T_n}|\hat{f}(n)E_n(x)+\hat{f}(-n)E_{-n}(x)|dx=o(1). \tag{3.8}$$

综合（3.2）～（3.8）诸式，即可明白

$$\int_{T_n}|\tau_{H(n),n}(f,x)-S_n(f,x)|dx=o(1). \tag{3.9}$$

记 $\sigma_n(f,x)$ 为 $S_n(f,x)$ 的Fejer平均．注意到 $f\in g$，我们有

$$\int_{T_n}|\tau_{H(n),n}(f,x)-f(x)|dx\leq\int_{T_n}|\tau_{H(n),n}(f,x)-\sigma_n(f,x)|dx+\int_{T_n}|\sigma_n(f,x)-f(x)|dx$$

$$=\int_{T_n}\left|\frac{H(n)}{n_l+1}[\sigma_{H(n)}(f,x)-\sigma_n(f,x)]-\frac{\sigma_n(f,x)}{n_l+1}\right|dx+o(1)$$

$$\leq\int_{T_n}|\sigma_{H(n)}(f,x)-\sigma_n(f,x)|l_n dx+\int_{T_n}\frac{|\sigma_n(f,x)|}{n_l+1}dx+o(1)=o(1). \tag{3.10}$$

结合（3.9），（3.10）即得

$$\int_{T_n}|S_n(f,x)-f(x)|dx\leq\int_{T_n}|\tau_{H(n)}(f,x)-S_n(f,x)|dx+\int_{T_n}|\tau_{H(n),n}(f,x)-f(x)|dx=o(1).$$

充分性证毕．现在证明必要性：

注意到（3.1）及（3.3）式，我们有

$$\int_{T_n}|\hat{f}(n)E_n(x)+\hat{f}(-n)E_{-n}(x)|dx\leq\int_{T_n}|\tau_{H(n),n}(f,x)-S_n(f,x)|dx$$

$$+\frac{1}{H(n)-n}\int_{T_n}\left|\sum_{k=n}^{H(n)}(H(n)-k)(\triangle\hat{f}(k)-\triangle\hat{f}(-k)E_k(x)\right|dx$$

$$+\frac{1}{H(n)-n}\int_{T_n}\left|\sum_{k=n}^{H(n)}(H(n)-k)\triangle\hat{f}(k)D_k(x)\right|dx$$

$$+\frac{1}{H(n)-n}\int_{T_n}\left|\sum_{k=n}^{H(n)}(\hat{f}(k+1)E_k(x)+\hat{f}(-k-1)E_{-k}(x))\right|dx$$

$$=J_1+J_2+J_3+J_4 \tag{3.11}$$

注意到（3.4）式，并分别利用（3.5），（3.6）得

$$J_2=o(1)\ ,\ J_3=o(1). \tag{3.12, 13}$$

由引理 3 得

$$J_4=o(1). \tag{3.14}$$

现在看
$$J_1=\int_{T_n}|\tau_{H(n),n}(f,x)-S_n(f,x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\int_{T_n}|\tau_{H(n),n}(f,x)-f(x)|\mathrm{d}x+\int_{T_n}|S_n(f,x)-f(x)|\mathrm{d}x$$
$$=\int_{T_n}|\tau_{H(n),n}(f,x)-f(x)|\mathrm{d}x+o(1).$$

由于$f\in g$，由(3.10)即得
$$J_1=o(1). \tag{3.15}$$

综合(3.11)～(3.15)诸式可知 $\int_{T_n}|\hat{f}(n)E_n(x)+\hat{f}(-n)E_{-n}(x)|\mathrm{d}x=o(1)$.

由引理1，即得 $\hat{f}(n)\lg(|n|/l_{|n|})=o(1)$ $(|n|\to\infty)$．定理证毕．

定理 2 设$S(f)\sim\sum_{|n|<\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$是$f\in\mathscr{E}$ 的Fourier级数，若对$1<p\leqslant2$ 满足条件(1.1)，则(1.2)及(1.3)都成立．

仔细检查定理1的证明过程．注意到对任意的$\lambda>1$,有不等式[5]
$$\|\tau_{[\lambda n],n}(f,x)-f(x)\|\leqslant ME_n(f)\left(\frac{n}{[\lambda n]}\right)^{1/2}+o(1)=o(1),$$
其中M为绝对常数，$E_n(f)=\inf\limits_{T_n}\|T_n-f\|$，$T_n=T_n(x)$ 是n阶三角多项式．

类似于定理1的证明，（这里就省略了）即得定理2．

定理 3 设$S(f)\sim\sum_{|n|<\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$是$f\in\mathscr{E}$ 的Fourier级数．若对$1<p\leqslant2$，条件(1.4)满足，且$\hat{f}(n)\lg(|n|/l_{|n|})=o(1)$，则(1.6)成立．

证明 设$f\in g$，从定理1的充分性证明可以看到，对$x\in T_n$，有
$$\|S_n(f,x)-f(x)\|\leqslant\|\tau_{H(n),n}(f,x)-S_n(f,x)\|+\|\tau_{H(n),n}(f,x)-f\|=o(1).$$
反之，在 $\|S_n(f,x)-f(x)\|=o(1)$ 的条件下
$$\left\|\frac{H(n)-n}{n_l+1}\sigma_{H(n)}(f,x)-\sigma_n(f,x)\right\|\leqslant\|\tau_{H(n),n}(f,x)-\sigma_n(f,x)\|+\left\|\frac{\sigma_n(f,x)}{n_l+1}\right\|$$
$$\leqslant\|\tau_{H(n),n}(f,x)-S_n(f,x)\|+\|S_n(f,x)-f(x)\|+\|f(x)-\sigma_n(f,x)\|$$
$$=\|\tau_{H(n),n}(f,x)-S_n(f,x)\|+o(1).$$
由(3.9)式，即得
$$\left\|\frac{H(n)-n}{n_l+1}\sigma_{H(n)}(f,x)-\sigma_n(f,x)\right\|=o(1).$$
于是有$f\in g$．定理证毕．

推论 1 设$S(f)\sim\sum_{|n|<\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$的Fourier级数，则当 $n\triangle\hat{f}(n)=o(1)$时，(1.3)成立．

由定理3直接可得推论1．

推论 2 设$S(f)\sim\sum_{|n|<\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$是$f\in L^1(T)$的Fourier级数．设$l_n=\|\sigma_n-f\|^{-1}$，$(n\lg n)\|\sigma_n(f)-f\|(\triangle\hat{f}(n)-\triangle\hat{f}(-n))=O(1)$，若$n\triangle\hat{f}(n)\|\sigma_n(f)-f\|=O(1)$，则

(1.5)成立.

利用定理1,类似于[2]中系2·1·1 的证明，即可获得推论2.

推论3 设$S(f)\sim\sum\limits_{|n|<\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$是$f\in\mathscr{B}$ g的Fourier级数，若$n\triangle\hat{f}(n)=O(1)$，则(1.3)成立.

这是定理1的直接推论.

推论 4 设$S(f)\sim\sum\limits_{|n|<\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$是$f\in\mathscr{B}$ 的Fourier级数，若条件(1.4)满足，则(1.3)成立.

类似于[1]中的推论(1.2)~(1.6)都相应得到改进，这里就不重复了.

参 考 文 献

[1] Č. V. Stanojević, Tauberian conditions for the L^1-convergence of Fourier series, Trans. Amer. Math. soc. 271(1982), 237—244.

[2] W. O. Bray and Č. V. Stanojević, Trans. Amer. Math. soc., 275(1983), 58—69.

[3] Č. V. Stanojevic, Proc. Amer. Math. soe., V82, No. (1981), 209—315.

[4] R. Bojanic and Č. V. stanojević, Trans. Amer. Math. soc., 269(1982), 677—683.

[5] G. A. Fomin, Mat. sb., 38(1981), 231.

接604页

参 考 文 献

[1] Goel, R. M. and Mehrok, B. S., J. Austral. Math. Soc. (Series A)35(1983), 1—17.

[2] Kumar, V., J. Math. Res. and Exposition 4: 1 (1984), 27—34.

[3] MacGregor, T. H., Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962), 532—537.