1988年11月

数学研究与评论
第八卷 第四期

导数具有正实部的函数类的子类*

杨 定 恭

（苏 州 大 学）

设$\lambda\geqslant 0, 0\leqslant\alpha<1, -1\leqslant B<A\leqslant 1$. $R_\lambda(\alpha)$表示在单位圆盘$E=\{z: |z|<1\}$内解析且满足条件$\mathrm{Re}\{f'(z)+\lambda zf''(z)\}>\alpha$的函数$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$构成的类. $R_\lambda(A, B)$表示在E内解析且$f'(z)+\lambda zf''(z)$从属于$\frac{1+Az}{1+Bz}$的函数$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$构成的类. $R_\lambda(A, B)$中形如$f(z)=z-\sum_{n=k}^{\infty}|a_n|z^n\ (k\geqslant 2)$的函数的全体记作$R^*_{\lambda,k}(A, B)$.

在本文中，我们建立了下面的结果：

定理 1 对$0\leqslant\lambda_0<\lambda$，有$R_\lambda(A, B)\subset R_{\lambda_0}(A, B)$.

定理 2 设c为复数且$\mathrm{Re}\,c>-1$, $f(z)\in R_\lambda(A, B)$，则

$$F(z)=\frac{c+1}{z^c}\int_0^z f(\zeta)\zeta^{c-1}\mathrm{d}\zeta\in R_\lambda(A, B).$$

定理 3 设$\lambda>0$, $f(z)\in R_0(\alpha)$，则当$|z|<\sqrt{1+\lambda^2}-\lambda$ 有$\mathrm{Re}\{f'(z)+\lambda zf''(z)\}>\alpha$. 这结果是准确的.

定理 4 设$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in R_\lambda(\alpha)$, $S_n(z)=z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n, n=2,3,\cdots$，则当$|z|<r_n$有$\mathrm{Re}\{S_n'(z)+\lambda zS_n''(z)\}>\alpha$，这里$r_n=\sup\{r: \mathrm{Re}\frac{1-z^n}{1-z}>\frac{1}{2}, |z|<r<1\}$. 这结果是准确的.

定理 5 设$f(z)=z-\sum_{n=k}^{\infty}|a_n|z^n\in R^*_{\lambda,k}(A, B)$，则$\sum_{n=k}^{\infty}n(1+\lambda(n-1))|a_n|\leqslant\frac{A-B}{1-B}$.

定理 6 设实数$c>-1$, $f(z)\in R^*_{\lambda,k}(A, B)$, $F(z)=\frac{c+1}{z^c}\int_0^z f(\zeta)\zeta^{c-1}\mathrm{d}\zeta$，则

$$\mathrm{Re}\{F'(z)+\lambda zF''(z)\}>1-\frac{(c+1)(A-B)}{(c+k)(1-B)},\quad z\in E.$$

这结果是准确的.

定理 7 设实数$c>-1$, $F(z)\in R^*_{\lambda,k}(A, B)$，则函数$f(z)=\frac{z^{1-c}}{c+1}(z^cF(z))'$在圆盘$|z|<\inf_{n\geqslant k}\{\frac{(1+\lambda(n-1))(c+1)(1-B)}{(c+n)(A-B)}\}^{1/(n-1)}$内是(单叶)星象的. 这结果是准确的.

（转591页）

* 1986年12月31日收到.

(1.5)成立.

利用定理1,类似于[2]中系2·1·1 的证明，即可获得推论2.

推论3 设$S(f)\sim\sum_{|n|<\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$是$f\in\mathscr{B}g$的Fourier级数，若$n\triangle\hat{f}(n)=O(1)$，则(1.3)成立.

这是定理1的直接推论.

推论4 设$S(f)\sim\sum_{|n|<\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$是$f\in\mathscr{B}$ 的Fourier级数，若条件(1.4)满足，则(1.3)成立.

类似于[1]中的推论(1.2)～(1.6)都相应得到改进，这里就不重复了.

参 考 文 献

[1] Č. V. Stanojević, Tauberian conditions for the L^1-convergence of Fourier series, Trans. Amer. Math. soc, 271(1982), 237—244.

[2] W. O. Bray and Č. V. Stanojević, Trans. Amer. Math. soc., 275(1983), 58—69.

[3] Č. V. Stanojevic, Proc. Amer. Math. soe., V82, No. (1981), 209—315.

[4] R. Bojanic and Č. V. stanojević, Trans. Amer. Math. soc., 269(1982), 677—683.

[5] G. A. Fomin, Mat. sb., 38(1981), 231.

接604页

参 考 文 献

[1] Goel, R. M. and Mehrok, B. S., J. Austral. Math. Soc. (Series A)35(1983), 1—17.

[2] Kumar, V., J. Math. Res. and Exposition 4:1 (1984), 27—34.

[3] MacGregor, T. H., Trans. Amer. Math'. Soc. 104 (1962), 532—537.