1988年11月

数学研究与评论
第八卷 第四期

对《ζ-半单环的结构》一文的注记

张 兆 基

（浙 江 大 学）

《数学学报》86年第三期上程福长《ζ-半单环的结构》一文，定义并讨论了ζ-半单环．主要结果是类似Wedderburn-Artin的结构定理．但是，用ζ-派生环的语言改叙以后，很容易看出，这些结果实际上就是一般环论中熟知结论的特例．

结合环R的σ-结构首先见于〔1〕．〔2〕中根据左右对称性，定义了R的ζ-结构．为了便于说明，我们先将〔2〕中一些定义录于此．

定义1 环R到R的映射ζ称为偏自同态，若对任意$a,b\in$R，有

（i） $(a+b)^\zeta=a^\zeta+b^\zeta$；

（ii） $(ab)^\zeta=a^\zeta b$ 或（ii）′ $(ab)^\zeta=ab^\zeta$．

其中满足（i）和（ii）的偏自同态映射称为前自同态，记作σ；满足（i）和（ii）′的偏自同态映射称为后自同态，记作τ．

设$a,b\in$R，A与B是R的非空子集．记

$$\Gamma_n^\zeta(a)=\begin{cases}a(a^\sigma)^{n-1}, & 若\zeta=\sigma,\\ (a^\tau)^{n-1}a, & 若\zeta=\tau;\end{cases}\qquad \Gamma_n^\zeta(A)=\begin{cases}\mathrm{A}(\mathrm{A}^\sigma)^{n-1}, & 若\zeta=\sigma,\\ (\mathrm{A}^\tau)^{n-1}\mathrm{A}, & 若\zeta=\tau.\end{cases}$$

$$\langle ab\rangle^\zeta=\begin{cases}ab^\sigma, & 若\zeta=\sigma,\\ a^\tau b, & 若\zeta=\tau;\end{cases}\qquad \langle AB\rangle^\zeta=\begin{cases}\mathrm{AB}^\sigma, & 若\zeta=\sigma,\\ \mathrm{A}^\tau\mathrm{B}, & 若\zeta=\tau.\end{cases}$$

由上面的定义可以看出，这里的ζ实质上就是右或左R-模R的R-自同态映射．

定义2 设N为R的加法子群，若$\langle \mathrm{RN}\rangle^\zeta\subseteq$N，$\langle \mathrm{NR}\rangle^\zeta\subseteq$N，则称N为环R的ζ-理想，记作N$\overset{\zeta}{\lhd}$R．设P$\overset{\zeta}{\lhd}$R，若对任意$a,b\in$R，

$$\langle ab\rangle^\zeta\in \mathrm{P}\Rightarrow a\in \mathrm{P}或b\in \mathrm{P}, \qquad (1)$$

则称P为环R的ζ-素理想．

定义3 若对任意$a,b\in$R，皆有$a^\zeta b^\zeta=b^\zeta a^\zeta$，则称R为ζ-交换环．

当ζ=σ时，以上定义与〔1〕中定义一致．

定义4 环R的ζ-根$\mathrm{N}_\zeta=\{a\in \mathrm{R}\mid \Gamma_n^\zeta(a)=0$，对某个正整数$n\}$．

我们要利用〔1〕中定义的σ-派生环．现在相应地称之为ζ-派生环．

定义5 （参见〔1〕定义1.4）R为环，ζ如上．则R关于原有加法及新定义的乘法o：

$$r_1\circ r_2=\langle r_1r_2\rangle^\zeta,\quad r_1,r_2\in \mathrm{R}$$

作成一个环．称为R的ζ-派生环，记为$[\mathrm{R}]_\zeta$．

定理 （见〔1〕性质1.4）N为R的ζ-理想⇔N为$[\mathrm{R}]_\zeta$的理想．

* 1986年10月31日收到．

当R的ζ-理想N看成是〔R〕$_\zeta$的理想时，也记为〔N〕$_\zeta$.

我们知道，在一般环R中，有

定义6　R的理想P称为素理想，若对任意理想A，B，

$$AB\subseteq P\Rightarrow A\subseteq P\text{或}B\subseteq P. \qquad (2)$$

定义7　R中由所有诣零理想生成的理想称为R的诣零根.

根据〔R〕$_\zeta$的定义及上面的定理，将〔R〕$_\zeta$中的单位元、幂零元、幂等元、理想、素理想、单纯理想、诣零理想、幂零理想、诣零根等，称为R中在ζ意义下的相应概念. 其中只有素理想. 诣零根的概念与〔2〕原来定义中的ζ-素理想、ζ-根不一致. 我们仍将其对应起来，并在最后说明这一点.

对〔2〕中的定义与结论；先都略去ζ-交换条件，从而可知，〔2〕中所谓R为广义Artin环或ζ-半单环，实际即是指〔R〕$_\zeta$为Artin环或Artin半单环. 此时，若记〔R〕$_\zeta$的诣零根为〔N〕$_\zeta$，则我们可将〔2〕中的一些结果改叙为〔R〕$_\zeta$的结论. 有

命题5′　〔R〕$_\zeta$为Artin环，则〔R〕$_\zeta$的任意诣零理想也为幂零理想.

定理2′　〔R〕$_\zeta$为Artin环，则〔N〕$_\zeta$为〔R〕$_\zeta$的最大幂零理想.

由此定理可知，Artin环〔R〕$_\zeta$为半单环$\Leftrightarrow$〔R〕$_\zeta$不含非零的幂零理想.

命题6′　〔R〕$_\zeta$为Artin半单环，则〔R〕$_\zeta$的任意非零理想必包含非零的幂等元.

命题7′　〔R〕$_\zeta$为Artin半单环，$0\neq$〔M〕$_\zeta\trianglelefteq$〔R〕$_\zeta$，则〔M〕$_\zeta$=〔R〕$_\zeta\circ e$=〔M〕$_\zeta\circ e$，其中$e\circ e=e\in$M.

命题8′　〔R〕$_\zeta$为Artin半单环，$0\neq$〔M〕$_\zeta\trianglelefteq$〔R〕$_\zeta$，则〔M〕$_\zeta$有单位元e_1，且〔M〕$_\zeta$=〔R〕$_\zeta\circ e_1=e_1\circ$〔R〕$_\zeta$.

定理3′　〔R〕$_\zeta$为Artin半单环，则〔R〕$_\zeta$必是有限个单纯理想的直和.

定理4′　Artin环〔R〕$_\zeta$=〔N_1〕$_\zeta\oplus\cdots\oplus$〔N_n〕$_\zeta$，其中每个〔N_i〕$_\zeta$（〔N_i〕$_\zeta\circ$〔N_i〕$_\zeta\neq 0$）为单纯理想，则〔R〕$_\zeta$必为Artin半单环.

以上这些都是一般环论中熟知的结论，例如可参见〔3〕.

我们要指出〔2〕中命题2 “环R的ζ-根是ζ-诣零理想”，即是说〔R〕$_\zeta$中所有幂零元组成的集合是诣零理想. 这一结论是不成立的. 因为一般环中，所有幂零元组成的集合不一定是理想. 下面可见到，加上ζ-交换条件，此结论成立.

还可以指出，〔2〕中命题3 “R的ζ-根N_ζ包含R的所有ζ-幂零理想”是多余的. 因为幂零理想必为诣零理想，其中所有元素都幂零. 故N_ζ无论看作〔R〕$_\zeta$的诣零根，或〔2〕中原来定义的ζ-根，都是显然的.

最后，在有ζ-交换条件的假设之下，可得

命题1　Artin环〔R〕$_\zeta$的诣零根〔N〕$_\zeta$恰由所有幂零元组成.

证明　显然〔N〕$_\zeta$中所有元素都是幂零元. 反过来，设a为〔R〕$_\zeta$中任意的幂零元，只要证明$a\in$N即可.

根据对称性，只就$\zeta=\sigma$的情形讨论. 并采用记号：$a^{[n]}=\Gamma_n^\sigma(a)$，$A^{[n]}=\Gamma_n^\sigma(A)$.

设$a^{[n]}=0$，〔R〕$_\zeta$中由a生成的理想为〔A〕$_\sigma$. 由于有σ-交换条件，故有

$$A=Ra^\sigma+aR^\sigma+Za \qquad (Z\text{为整数环})$$

及

$$A^{\sigma} = R^{\sigma}a^{\sigma} + Za^{\sigma},$$

从而有

$$A^{[2n]} = (AA^{\sigma})^{[n]} = \{(Ra^{\sigma} + aR^{\sigma} + Za)(R^{\sigma}a^{\sigma} + Za^{\sigma})\}^{[n]}$$
$$\subseteq (Ra^{\sigma})^{[n]} \subseteq R(a^{\sigma})^{n} = R(a^{[n]})^{\sigma} = 0$$

即 $[A]_{\zeta}$ 为幂零理想，故 $a \in A \subseteq N$.

命题2 $[R]_{\zeta}$ 中的素理想与强素理想（即〔2〕中R的ζ 素理想）一致.

证明 也只对$\zeta=\sigma$的情形讨论．我们要证明对理想 $[P]_{\sigma}$ 来说，条件（1）与（2）等价.

设 $[P]_{\sigma}$ 满足（1），但不满足（2）．就是说存在$A, B \trianglelefteq [R]_{\zeta}$，使$AB^{\sigma} \subseteq P$，而$A \subseteq P$，$B \nsubseteq P$．从而有$a \in A$，$b \in B$，使得$a \notin P$，$b \notin P$.

另一方面，$ab^{\sigma} \in AB^{\sigma} \subseteq P$，故由（1）知，$a \in P$，或$b \in P$．此为矛盾．说明此时 $[P]_{\sigma}$ 必满足（2）.

反过来，设 $[P]_{\sigma}$ 满足（2），由一般环论的结果知，这等价于说，对任意a, b R，

$$aR^{\sigma}b^{\sigma} \subseteq P \Rightarrow a \in P \text{ 或 } b \in P. \qquad (3)$$

假定$ab^{\sigma} \in P$．于是$aR^{\sigma}b^{\sigma} = ab^{\sigma}R^{\sigma} \subseteq P$．再由（3），便得$a \in P$ 或 $b \in P$．即 $[P]_{\sigma}$ 也满足（1）.

于是，加上ζ 交换条件后，〔2〕中的结果作为一般环论中结论的特例，仍然成立.

附注 值得注意的是，由于 $\langle ab\rangle^{\zeta} = \langle ba\rangle^{\zeta} \Rightarrow a^{\zeta}b^{\zeta} = (\langle ab\rangle^{\zeta})^{\zeta} = (\langle ba\rangle^{\zeta})^{\zeta} = b^{\zeta}a^{\zeta}$，而箭头的反向一般不成立．故 $[R]_{\zeta}$ 为交换环可推得R为ζ－交换环，但反之不然．即在较弱的ζ－交换条件之下，可推得一般在 $[R]_{\zeta}$ 为交换环的假设之下得出的结论，如命题1与2．还可见〔1〕.

若一个环R可作为另一个ζ－交换环S的ζ－派生环，则尽管R未必交换，但我们仍能期望R具有某些在交换环中才具有的性质.

参 考 文 献

〔1〕许永华，环的Γ结构（Ⅰ），数学学报，20：1（1977），61—72.

〔2〕程福长，ζ 半单环的结构，数学学报，29：3（1986），347—350.

〔3〕谢邦杰，抽象代数学，上海科学技术出版社，1982.