# 关于Dirac分布的幂

李 程 宽
（华中农业大学 武汉）

## 1 $\delta^{a}_{(x)}$ ( Re $a>0$ )

选定$\delta$—序列$\delta_n(x)=\left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2}e^{-nx^2}$ $\quad x\in\mathrm{R}$

对任一固定复数$a$，光滑函数$f(x)$的$a$阶导数定义如下：

$$D^{a}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{a}^{x}(x-t)^{\beta-1}f^{(a+\beta)}(t)\,dt$$

这里$\beta$使得$a+\beta$为非负整数，且使$0<\mathrm{Re}\beta\leq 1$，$a$为固定实数，可为$-\infty$，视$f$是否具有紧文集或是否急降而定．

为简单起见，仅讨论$a>0$的情形，当$a$是复数时且Re$a>0$，讨论完全类似．

文献〔1〕中已给出：当$k\leq a<k+1$（$k$为正整数）$\varphi\in D(R)$，有展式：$\varphi(x)=$

$$\varphi(0)+\varphi'(0)x+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(0)x^{k-1}+D^{\beta}\varphi(0)x^{\beta}+A(x_0)x^{k}$$

当$a=k$时，$\beta=k-1$项$D^{\beta}(0)x^{\beta}$重合于前一项，$A(x_0)$是与点$x_0$有关的常数

在$D(R)$子空间$D_{k-1}=\{\varphi(x)\in D(R):\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi^{(k-1)}(0)=0\}$上计算泛函值（其中$k<a<k+1$）

$$\langle\delta_n^{a},\varphi(x)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}}e^{-anx^2}\varphi(x)\,dx=\int_{-x_0}^{x_0}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}}e^{-anx^2}[D^{\beta}\varphi(0)x^{\beta}+A(x_0)x^{k}]dx.$$ 其中$\beta=a-1$

令$x=\sqrt{\frac{1}{an}}y$，则$\langle\delta_n^{a},\varphi(x)\rangle=\left(\frac{1}{a\pi}\right)^{\frac{a}{2}}D^{\beta}\varphi(0)\int e^{-y^2}y^{\beta}dy+\int_{-a_0}^{a_0}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}}e^{-y^2}A\left(\frac{1}{an}\right)^{\frac{k+1}{2}}$

$\cdot y^{k}dy$．因为$a<k+1$，由积分绝对一致收敛性不难看出：$\lim\limits_{n\to\infty}\int\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}}e^{-y^2}A\left(\frac{1}{an}\right)^{\frac{k+1}{2}}\cdot$

$y^{k}dy=0$，所以$\langle\delta^{a},\varphi(x)\rangle=\lim\limits_{n\to\infty}\langle\delta_n^{a},\varphi(x)\rangle=\left(\frac{1}{an}\right)^{\frac{a}{2}}\int e^{-y^2}y^{\beta}dy\,D^{\beta}\varphi(0)$，$\varphi\in D_{k-1}$．特别是，当$a=2l$（$l$为正整数）时，就有$\langle\delta^{2l},\varphi(x)\rangle=0$，即$\delta^{2l}=0$．

利用公式：$\int_{0}^{\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$（$n$是正整数），可知：当$a=2l+1$（$l$为正整数或0）时，就有

* 1986年5月29日收到．陈庆益教授推荐．

$$\langle\delta^a,\ \varphi(x)\rangle=\left(\frac{1}{a\pi}\right)^{\frac{a}{2}}2\cdot\int_0^{\infty}e^{-y^2}y^{2l}\mathrm{d}y\mathrm{D}^{2l}\varphi(0)=\left(\frac{1}{a\pi}\right)^{\frac{a}{2}}\frac{(2l-1)!!}{2^l}\sqrt{\pi}\,\mathrm{D}^{2l}\varphi(0).$$

在$0<a<1$时，令$M=\underset{x\in\mathbf{R}}{\mathrm{Max}}|\varphi(x)|$，则$(\delta_n^a,\ \varphi(x))=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}}e^{-anx^2}\varphi(x)\mathrm{d}x$.所以,当$n\to\infty$时$|(\delta_n^a,\ \varphi)|\le M\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}}e^{-anx^2}\mathrm{d}x\to 0$．因此，$\delta^a=0\ (0<a<1)$．综上可得:

**定理1** 当$0<a<1$时$\delta^a=0$．当$k<a\le k+1$（$k$为正整数）时，在$\mathscr{D}_{k-1}$有$\langle\delta^a,\ \varphi(x)\rangle=C_a\mathrm{D}^\beta\varphi(0)$，其中$C_a=\left(\frac{1}{a\pi}\right)^{\frac{a}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}y^\beta\mathrm{d}y$，$\beta=a-1$．特别当$a=2l$时，$\delta^a=0$．当$a=2l+1$时，$\langle\delta^a,\ \varphi(x)\rangle=\left(\frac{1}{a\pi}\right)^{\frac{a}{2}}\frac{(2l-1)!!}{2^l}\sqrt{\pi}\,\mathrm{D}^{2l}\varphi(0)$.

## 2．$\delta'^a(x)$ （$\mathrm{Re}\,a>0$）

考察$\delta_n(x)=\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-nx^2}$的导数，对$a>0$的实数讨论复数类似：$\delta_n'(x)=\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-nx^2}(-2nx)$取定一个分枝后，可定义$(-2)^a=e^{a\ln(-2)}=2^a(\cos a\pi+i\sin a\pi)$．当$0<a<\frac{1}{2}$时，计算泛函值

$$\langle\delta_n'^a(x),\ \varphi(x)\rangle=\{\mathrm{Re}(-2)^a\}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}}e^{-anx^2}n^ax^a\varphi(x)\mathrm{d}x=2^a\cos a\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}}e^{-anx^2}n^ax^a\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

所以$|\langle\delta_n'^a(x).\varphi(x)\rangle|\le 2^a\mathrm{Max}|\varphi(x)|\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}}n^a\left(\frac{1}{an}\right)^{\frac{a+1}{2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}y^a\mathrm{d}y\to 0$．当$n\to+\infty$时.所以当$0<a<\frac{1}{2}$时，$\delta'^a(x)=0$；当$a=\frac{1}{2}$时，$\mathrm{Re}(-2)^a=0$，有$\delta'^{\frac{1}{2}}(x)=0$；当$\frac{1}{2}<a<1$时$\varphi(x)\in D_0(\mathbf{R})$．$\beta=2a-1$计算泛函值

$$\langle\delta_n'^a(x),\ \varphi(x)\rangle=\{\mathrm{Re}(-2)^a\}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}}e^{-anx^2}n^ax^a[\varphi(0)+\mathrm{D}^\beta\varphi(0)x^\beta+Ax]\mathrm{d}x.$$

令$x=\sqrt{\frac{1}{an}}y$，则$\langle\delta_n'^a(x).\varphi(x)\rangle=2^a\cos a\pi\cdot\pi^{-\frac{a}{2}}a^{-\frac{3a}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}y^{a+\beta}\mathrm{d}y\mathrm{D}^\beta\varphi(0)+2^a\cos a\pi\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}}e^{-anx^2}n^ax^aAx\mathrm{d}x$．所以$\langle\delta'^a(x),\ \varphi(x)\rangle=\lim\limits_{n\to\infty}\langle\delta_n'^a(x),\ \varphi(x)\rangle=C_a\mathrm{D}^\beta\varphi(0)$，$C_a=2^a\cos a\pi\cdot\pi^{-\frac{a}{2}}a^{-\frac{3a}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}y^{a+\beta}\mathrm{d}y$．一般说来：当$k\le a<k+\frac{1}{2}$时，$\varphi\in D_{2k-1}=\{\varphi(x)\mid\varphi(0)=\cdots=\varphi^{(2k-1)}(0)=0\}$，$\langle\delta'^a,\ \varphi\rangle=C_a\mathrm{D}^\beta\varphi(0)$，其中$\beta=2a-1$，$C_a=2^a\pi^{-\frac{a}{2}}\cos a\pi\cdot a^{-\frac{3a}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}y^{a+\beta}\mathrm{d}y$；当$k+\frac{1}{2}<a<k+1$时，$\varphi\in D_{2k}$，$\langle\delta'^a(x),\ \varphi(x)\rangle=C_a\mathrm{D}^\beta\varphi(0)$，其中$\beta=2a-1$，$C_a=2^a\pi^{-\frac{a}{2}}\cos a\pi\cdot a^{-\frac{3a}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}y^{a+\beta}\mathrm{d}y$.

## 参 考 文 献

〔1〕陈庆益、Dirac分布的幂，数学研究与评论，1（1981）.

〔2〕Leray T, Hyperbolic Differential Equations, Princeton, 1955, 24—25.