关于“四元数自共轭矩阵与行列式的几个定理”的注记*

杨　忠　鹏

（吉林师范学院，吉林市）

本刊1985年第4期发表郝稚传的“四元数自共轭矩与行列式的几个定理”(称为〔1〕)的文章的主要工作分为两部分．〔1〕在英文摘要中写到:“（i）This essay has improved the conclusion of theorem 8 and theorem 9 in〔2〕”即〔1〕称之第一部分工作在于改进了〔2〕的定理8、9的结果，其根据就是〔1〕的定理1、2．〔1〕称定理1—若A为四元数体Q上半正定的n阶自共轭矩阵且$\|A\|\neq 0$．则有$1<1+\|A\|<\|A+I\|$——“是文献〔2〕中定理8：$1<\|A+I_n\|$这一结果的改进”．〔1〕称定理2——设A，B分别为四元数体Q上半正定与正定的n阶自共轭矩阵；且$\|A\|\neq 0$，则有：$\|B\|<\|A\|+\|B\|<\|A+B\|$．——“是文献〔2〕中定理9的$\|B\|<\|A+B\|$这一结果的改进”．

我认为〔1〕的讲法是不对的，因为：

（1）〔1〕的定理1、2与〔2〕的定理8、9的讨论对象是不同的．

〔2〕的相应定理的原文为：

定理8　如果$A\neq 0$为半正定的，则$\|A+I\|>1$

定理9　如果B为正定的而A为半正定的且$A\neq 0$，则$\|A+B\|>\|B\|$．

可见〔2〕中的A是任意的非零的半正定矩阵．

设A为Q上自共轭矩阵．从〔1〕的引理3知$\|A\|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$（实数$\lambda_1$，…，$\lambda_n$为$A$的全部特征根）．由〔3〕知$A$为半正定的当且仅当$\lambda_i\geq 0$（$i=1,2,\cdots,n$）(见〔3〕，p25，定理6)．这样当$A$为半正定时，$\|A\|\neq 0\Leftrightarrow 0$不是$A$的特征根$\Leftrightarrow\lambda_i>0$ ($i=1,2,\cdots,n$)．即〔1〕中的A实质是正定阵．

可见〔1〕的讨论范围要远远小于〔2〕，因此不能说〔1〕改进了〔2〕的结果．

（2）若认为〔1〕中$\|A\|\neq 0$是关于〔2〕中的$A\neq 0$的笔误．那么当$A(\neq 0)$不是正定阵时，由（1）知$\|A\|=0$（如取$A=U\mathrm{diag}(1,2,0,\cdots,0)\bar{U}'$，$U$为广义$U$矩阵)．因此这时〔1〕的结果是错误的，同时十分清楚地表明了这样的事实：〔2〕的结果的改进绝不能以〔1〕的方式出现．

（3）对于给定的满足〔2〕的定理9的A，B来说，易知存在着作为A，B函数的$\varepsilon(A,B)=\varepsilon>0$来改进已有的结果，即$\|A+B\|>\|B\|+\varepsilon(A,B)=\|B\|+\varepsilon>\|B\|$．但是若认为〔2〕中的$A$，$B$是任意满足题设条件的矩阵，则〔2〕的结果是不能再改进的了，即不存在与A，B无关的$\varepsilon>0$，使上述不等式成立．

* 1986年9月15日收到．

不然有$\varepsilon_0>0$，使得任意的正定阵B和半正定阵$A(\neq 0)$，有$\|B\|<\|B\|+\varepsilon_0<\|A+B\|$.

设$B_0=U\mathrm{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_n)\overline{U}'$，$A_0=U\mathrm{diag}(\frac{\varepsilon_0}{2},0,\cdots,0)\overline{U}'$；其中$U$为广义$U$矩阵，$b_1>0$，$b_2=\cdots=b_n=1$．则$A_0$，$B_0$满足〔2〕的条件，易知$\|B_0\|=\prod_{i=1}^{n}b_i=b_1$．注意到$U\overline{U}'=I$，由〔1〕的引理7知$\|A_0+B_0\|=\|U\overline{U}'\|\left(b_1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\prod_{i=2}^{n}b_i=\|I\|\left(b_1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$

$=b_1+\frac{\varepsilon_0}{2}<\|B_0\|+\varepsilon_0$

可见，如果认为〔2〕的结果是对任意的非零半正定阵和正定阵而得到的话,〔2〕的结果是最好的了.

顺便指出〔1〕的定理3的讨论前　是A_1，…，A_k“皆为半正定，并且$\|A_1\|$,$\|A_2\|$,…,$\|A_k\|$均为非零”,从（1）知$A_j(j=1,2,\cdots,k)$实质是正定阵，因此所得的结果并不适用一般的半正定阵.

上述看法，如有不妥，恳请〔1〕的作者与读者指正.

参 考 文 献

〔1〕郝稚传，四元数自共轭矩阵与行列式的几个定理，数学研究与评论，4(1985)，pp15—20.

〔2〕谢邦杰，关于自共轭四元数矩阵与行列式的几个定理，吉林大学自然科学学报，1(1982)，pp1—7.

〔3〕谢邦杰，四元数自共轭矩阵与行列式，吉林大学自然科学学报，2(1980)，pp19—34.

A Note on “Several Theorems of Self-Conjugate Quaternions Matrices and Determinants”

Yang Zhongpeng

(Jilin Teacher's College)

Abstract

〔1〕said that theorem 1 and theorem 2 of 〔1〕have improved the conclusion of theorem 8 and theorem 9 in〔2〕.We point out this way of saying is incorrect, and the conclusion of theorem 8 and theorem 9 in〔2〕is not improved if we hold that A and B are any self-conjugate quaternions semipositive definite and positive definite matrix.