第10卷 第2期
1990年5月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 10 No.2
May, 1990

PF环与群环的Grothendieck群*

佟 文 廷

（南京大学数学系）

§1 引言与记号

如众周知，Serre曾提出一个著名的猜测：域上的n元多项式环上的有限生成投射模必为自由模．这是代数学家与拓扑学家都极为重视的一个问题(见[1])．1976年Quillen与Suslin同时独立地证明了Serre这一猜测是成立的，而且他们进一步证明了将域改为PID后，相应的结果仍成立(见[2])．我们在[3]中研究了更广的环类，称使一切有限生成投射R－模均为自由模的可换环R为PF环．特别是，在[3]中我们证明了如下结果．

引理1[3] $PF=UCP\cap PSF$,

其中UCP表示有么模列性质的可换环类．即$R\in UCP$表示：若$a_1b_1+\cdots+a_nb_n=1, a_j, b_j\in R$，则有可逆的矩阵$A\in R^{n\times n}$使$a_1,\cdots,a_n$作为其第一列(行)的元素．$PSF$表示有限生成投射模均为准自由模的可换环类(准自由模指与一个有限生成自由模之直和为有限生成自由模的模)．

UCP是一类重要的环类，因为Euclid整环，甚至PID环都是UCP环．

在本文中，我们继续讨论PF的一些性质，以及群环的Grothendieck群，特别是在R为可换环，G为Abel群时，给出Grothendieck群$K_0(RG)$与$K_0(R)$的关系以及同构条件．

本文中的环都指可换酉环(因此都是IRN环)，本文中的模都指酉模．

§2 关于PF环的一些性质

在代数K－理论中，当R为可换环时，其Grothendieck群$K_0(R)$有一个环结构且为可换环．在[3]中我们已证出$K_0(R)\simeq\mathbf{Z}$(环同构)的充分必要条件是$R\in PSF$．用K_0关于环的直和性质可知PSF环类对环的直和并不是封闭的．现在我们来证明对UCP环类，在直和的运算下是封闭的．

命题1 设R, R_j都是可换环且 $R=\bigoplus_{j=1}^{n}R_j$, 则

$$R\in UCP\Leftrightarrow R_j\in UCP,\quad j=1,\cdots,n.$$

证明 注意R的元素都可写成形如

$$a_j=(a_{j1},\cdots,a_{jn}),\ \forall a_{ji}\in R_i\ .$$

* 1988年8月2日收到．国家自然科学基金资助项目．

且$(a_1,\cdots,a_n)$为R^n的么模列(即有$\beta_j\in R$使$a_1\beta_1+\cdots+a_n+\beta_n=1$)等价于$(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})$为$R_i^n$的么模列.

若$R\in UCP$, $(a_{1i},\cdots,a_{ni})$为R_i^n中的么模列，令$\sum_{j=1}^{n}a_{ji}b_{ji}=1$, $\forall\, b_{ji}\in R_i$. 记

$$a_j=(1,\cdots,1,a_{ji},1,\cdots,1),\qquad j=1,\cdots,n.$$

容易看出，若取

$$\beta_1=(1,\cdots,1,b_{1i},1,\cdots,1)$$
$$\beta_j=(0,\cdots,0,b_{ji},0,\cdots,0),\qquad j>1.$$

则在R中

$$\sum_{j=1}^{n}a_j\beta_j=1.$$

于是$(a_1,\cdots,a_n)$为R^n中的么模列. 由$R\in UCP$知有可逆矩阵$A\in R^{n\times n}$使$a_1,\cdots,a_n$为A的第一列元素. 由环的直和运算知相应地可由之取出一个可逆矩阵$A_i\in R_i^{n\times n}$使$a_{1i},\cdots,a_{ni}$为A_i的第一列元素. 因此$R_i\in UCP$, $i=1,\cdots,n$.

反过来，设$R_i\in UCP$, $i=1,\cdots,n$而$(a_1,\cdots,a_n)$为R^n中的么模列，其中$a_j=(a_{j1},\cdots,a_{jn})$. $a_{ji}\in R_i$. $i,j=1,\cdots,n$. 此时可看出$(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})$为$R_i^n$中的么模列. 于是，必有可逆矩阵$A_i\in R_i^{n\times n}$使得$a_{1i},\cdots,a_{ni}$为$A_i$的第一列元素. 由环的直和运算与矩阵运算知，将$A_1,\cdots,A_n$的$(i,j)$位置元素合写成向量形式作为$(i,j)$位置元素，则得可逆矩阵$A\in R^{n\times n}$使$a_1,\cdots,a_n$作为$A$的第一列元素. 因此$R\in UCP$. 命题证毕.

下面引入局部可分解环的定义(可参看[4], P.49).

定义1 若环R为有限个局部环的直和，则称R为局部可分解环，记为$R\in LD$.

由[5]知，地位重要的可换Artin环必为有限个局部环之直和，因此，局部可分解环类概括了可换Artin环类. 当然，也概括了可换局部环类(它们在代数几何中十分有用). 本文讨论的局部可分解环均指可换环. 我们可得如下结果.

定理1 1) $LD\subset UCP$

2) 设$R\in LD$, 则下述各点是等价的:

① R为局部环(记为$R\in L$);

② $R\in PF$;

③ $R\in PSF$;

④ $K_0(R)\sim\mathbf{Z}$.

3) $L=LD\cap PF=LD\cap PSF$.

证明 1) 注意局部环上的有限生成投射模必为自由模(比如见[6]), 因此局部环为PF环. 由引理1知，局部环为UCP环. 再由定义1与命题1即得$LD\subset UCP$.

2) ①⇒②由上段证明已得. ②⇒③由引理1即得. ③⇒④是[3]中的已知结果.

④⇒① 设$R\in LD$, $K_0(R)\sim\mathbf{Z}$. 由定义1知必有局部环$R_1,\cdots,R_n$使$R=R_1\oplus\cdots\oplus R_n$. 于是由[7]知

$$K_0(R)\sim K_0(R_1)\oplus\cdots\oplus K_0(R_n)\simeq\mathbf{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^n.$$

但$K_0(R)\sim\mathbf{Z}$. 于是作为$\mathbf{Z}$模有$\mathbf{Z}^n\sim\mathbf{Z}$. 但$\mathbf{Z}$为$IBN$环，因此$n=1$, 即$R$为局部环. 这就

证出了 ④⇒①．从而①，②，③，④四点等价．

3〉 $L\subset LD\cap PF\subset LD\cap PSF$是显见的．又若$R\in LD\cap PSF$．由[3]知$K_0(R)\simeq\mathbf{Z}$．于是由2〉中已证结果知$R\in L$．即，$LD\cap PSF\subset L$．这就证出了3〉，从而定理证毕．

由定理1可得如下的有用推论．

推论1 1〉 可换Artin环为UCP环．

2〉 若R为可换Artin环，则

$$R\in L\Leftrightarrow R\in PF\Leftrightarrow R\in PSF\Leftrightarrow K_0(R)\simeq\mathbf{Z}.$$

注1 由于一般的可换局部环未必为Artin环(例如$R=\{\frac{a}{b}|a,b\in\mathbf{Z},\ (b,p)=1,p$为一个素数$\}$为可换局部环但非Artin环)，我们得不出定理1,3〉的类似结果$L=CA\cap PF$等，其中CA表示可换Artin环类．

对可换Artin半单环(它们同构于一些域的直和)显然有

推论2 设R为可换Artin半单环，则

$$R\in PF\Leftrightarrow R\in PSF\Leftrightarrow R\text{为域}\Leftrightarrow K_0(R)\simeq\mathbf{Z}.$$

注2 容易看出定理1、推论1,2中$K_0(R)\simeq\mathbf{Z}$理解为群同构或环同构都是等价的．下节中未加指明处亦然．

§3 关于群环的PF性及其Grothendieck群

在群环的研究中，我们已经知道，若R为环，G为群，则群环RG的性质与R的性质以及G的性质是息息相关的．这正是研究群环的主要目的之一．本节中我们来讨论G为(非平凡)Abel群的情形．先设R为可换Artin环，来证明如下结果．

定理2 设R为可换Artin环，G为有限Abel群，则下述各点是等价的：

① $RG\in PF$;

② $RG\in L$;

③ G为p-群，$R\in L$且$\mathrm{ch}\frac{R}{J}=p$，其中J为R的Jacobson根，在这里即R的唯一极大理想;

④ $RG\in PSF$;

⑤ $K_0(RG)\simeq\mathbf{Z}$.

证明 ①⇔②⇔④⇔⑤ 由[8]知，RG为Artin环当且仅当R为Artin环且G为有限群．因此由设知，RG为可换Artin环．再由本文上节推论1即得①⇔②⇔④⇔⑤．

②⇔③ 由已知结果(比如见[9]，P.73)：$RG\in L\Leftrightarrow G$为p-群，$R\in L$且$\mathrm{ch}\frac{R}{J}=p$．即知②⇔③．

注意到局部环的K_0群同构于$\mathbf{Z}$(对可换环是环同构)．由上述②⇔③之证所引的结果立得如下推论．

推论3 设G为Abel p-群，可换环$R\in L$且$\mathrm{ch}\frac{R}{J}=p$，则有环同构

$$K_0(RG)\simeq\mathbf{Z}$$

记SS为(可换)Artin半单环类，我们又可得如下结果．

推论4 设R为域，G为有限(非平凡)Abel群，则

1〉 $RG\in PF\setminus SS\Leftrightarrow RG\in PF$但非域$\Leftrightarrow RG\in PF\Leftrightarrow G$为$p$-群且$\mathrm{ch}R=p$.

2） $RG\in SS\setminus PF\Leftrightarrow RG\in SS$ 但非域 $\Leftrightarrow RG\in SS\setminus PSF\Leftrightarrow |G|$ 在 R 中可逆，且 $K_0(RG)\not\simeq \mathbf{Z}$.

证明 1） $RG\in PF\setminus SS\Rightarrow RG\in PF$ 但非域 $\Rightarrow RG\in PF$ 是显见的．而由定理2可知 $RG\in PF\Leftrightarrow G$ 为 p-群且 $\mathrm{ch}R=p$（这里的 $J=0$）．再由著名的Maschke定理知此时 $RG\notin SS$．因此又推出 $RG\in PF\setminus SS$．这就完成了1）的证明．

2） 由［8］中结果（注意该文中的完全可约可换环即指可换Artin半单环）知：$RG\in SS\Leftrightarrow R\in SS$，$G$ 有限且 $|G|$ 为 R 中的可逆元．用［3］中结果知，$RG\in PSF\Leftrightarrow K_0(RG)\simeq\mathbf{Z}$．再注意可换Artin半单环是域之直和，其 K_0 群同构于 $\mathbf{Z}^n$，即得欲证．

下面来研究比Artin环更广的半局部环上的群环，我们来证明如下命题．

命题2 设 R 为可换半局部环，且下述二条件至少有一个成立：①．G 为有限Abel群，②．$\mathrm{ch}\frac{R}{J}=p>0$，$G=A\oplus B$，其中 A 为无限Abel p-群，B 为有限Abel群但 $p\nmid |B|$，则

$$K_0(RG)\simeq\mathbf{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}.$$

证明 由［9］，P.74知，在所述条件下 RG 为可换半局部环．再由［7］之命题14即得欲证．

将此命题用于Artin环，立得如下推论．

推论5 设 R 为可换Artin环，G 为有限Abel群，则

$$K_0(RG)\simeq\mathbf{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}.$$

后面，我们还将对更一般的 LD 环类证明有关的一些结果．现在先对域上的群环来证明如下结果．

定理3 设 R 为域，G 为Abel群，则

1） G 为无限循环群或 G 为有限 p-群但 $\mathrm{ch}R=p$ 时，$RG\in PF$，因此 $K_0(RG)\simeq\mathbf{Z}$（环同构）．

2） G 为自由Abel群时 $K_0(RG)\simeq\mathbf{Z}$（环同构）．

证明 1） 当 G 为无限循环群，即 $G\simeq\mathbf{Z}$ 时，由1974年Gilmer与Parker［10］中结果知，设 G 为非平凡无挠群且 R 为整环时，$RG\in PID\Leftrightarrow R$ 为域且 G 为无限循环群．由此知 $RG\in PID$．于是 $RG\in PF$．因此 $K_0(RG)\simeq\mathbf{Z}$．

当 G 为有限 p-群且 $\mathrm{ch}R=p$ 时，由本文上面的推论4，1）知 $RG\in PF$，因此 $K_0(RG)\simeq\mathbf{Z}$．

2） 设 G 为自由Abel群，即 $G\simeq\coprod_{i\in I}\mathbf{Z}$．由［9］，P．32知有环同构

$$RG\simeq R(\coprod_{i\in I}\mathbf{Z})\simeq R[\{x_i\},\{x_i^{-1}\},i\in I],$$

其中上式右边为 R 上的Laurent多项式环．于是由［2］，P．143知 $K_0(R)$ 为 $K_0(RG)$ 的子环（同构意义下）．另一方面，R 为左正则环（例如 R 为左Noether的左遗传环等）时，$K_0(R)\simeq K_0(R[\{x_i\},\{x_i^{-1}\},i\in I])$ 而域 R 当然是左正则的且 $K_0(R)\simeq\mathbf{Z}$．因此，综上知，此时 $K_0(RG)\simeq\mathbf{Z}$．定理证毕．

由本定理末段之证立得如下结果．

推论6 设 R 为可换Noether遗传环，G 为自由Abel群．则有环同构：

$$K_0(RG)\simeq\mathbf{Z}.$$

注意 当 R 为可换环，G 为Abel群时，RG 为可换环，因此 $\mathbf{Z}$ 必为 $K_0(RG)$ 的直和分量（比如，见［7］）．现在自然要问：R 是什么环时，$K_0(RG)\simeq\mathbf{Z}$？对此，我们有如下结果．

定理 4 设$R\in UCP$，G为Abel群，则有环同构 $K_0(RG)\simeq K_0(R)$．因此当$R\in PF$时，$K_0(RG)\simeq \mathbf{Z}$．

证明 考察环同态

$$R \overset{f}{\rightarrowtail} RG \xrightarrow{g} R,$$

其中f，g之定义分别为

$$f(r)=r1_G,\ 1_G\text{为}G\text{的单位元},\ \forall r\in R.$$

$$g\left(\sum_{j=1}^{n} r_j g_j\right)=\sum_{j=1}^{n} r_j \quad \forall r_j\in R,\ g_j\in G,$$

容易看出，$gf=I$（恒等映射）．因此由［7］知

$$K_0(RG)\simeq K_0(R)\oplus \mathrm{Ker}(K_0 g),$$

其中 $K_0 g$为环同态g经由函子K_0 诱导的环同态．现在只需证$\mathrm{Ker}(K_0 g)=0$．

设 P为有限生成投射RG- 模使

$$K_0 g([P])=[R\underset{g}{\otimes}P]=0.$$

其中

$$R\underset{g}{\otimes}P=R\underset{RG}{\otimes}P,$$

则有n使

$$R\underset{g}{\otimes}P\oplus R^n\simeq 0\oplus R^n\simeq R^n.$$

因此$R\underset{g}{\otimes}P$为准自由R-模．但$R\in UCP$，于是由［6］知$R\underset{g}{\otimes}P$为（有限生成）自由R-模．但R为可换环，因此$R\in IBN$，故由上式知

$$R\underset{g}{\otimes}P=R\underset{RG}{\otimes}P=0.$$

而作为R-RG双模，R为RG的直和分量，因此

$$R\underset{g}{\otimes}P\rightarrowtail RG\underset{RG}{\otimes}P\simeq P.$$

由此知，$rx=0$，$\forall r\in R$，$x\in P$．因此$r1_Gx=0$.于是有$rGP=0$.从这里看出

$$RG\underset{g}{\otimes}P=0.$$

而

$$RG\underset{g}{\otimes}P=RG\underset{RG}{\otimes}P\simeq P,$$

故$P=0$. 即$\mathrm{Ker}(K_0 g)=0$．从而定理证毕．

显然本定理概括了定理3.2〉的结果，且可对可换 Artin环，LD环使用．

对比可换Artin环更广的LD环类，我们可得如下结果．

命题 3 设$R\in LD$，G为无限循环群，则下述各点是等价的：

① $K_0(RG)\simeq\mathbf{Z}$；

② $K_0(R)\simeq\mathbf{Z}$；

③ $R\in PSF$；

④ $R\in PF$；

⑤ R为局部环．

证明 由定理 1 已知$LD\subset UCP$．且②，③，④，⑤是互相等价的．再由定理 4 知

$K_0(RG)\simeq K_0(R)$. 因此又知①与②是等价的. 故上述五点都是相互等价的.

由此命题立得如下推论.

推论 6 设 $R\in LD$, G 为无限循环群. 则 $RG\in PF$ 时 R 必为局部环, 因此 $R\in PF$.

命题 4 设 R 为可换 Artin 半单环, G 为无限循环群, 则 $RG\in PF\Leftrightarrow R$ 为域.

证明 注意由设知, R 为有限个域的直和且 $R\in LD$. 若 $RG\in PF$, 由推论 6 知 $R\in PF$, 因此, $K_0(R)\simeq \mathbf{Z}$. 设 $R\simeq R_1\oplus\cdots\oplus R_n$, R_j 为域, 则

$$K_0(R)\simeq K_0(R_1)\oplus\cdots\oplus K_0(R_n)\simeq \mathbf{Z}^n,$$

仿定理 1 之 1)⇒1) 之证知 $n=1$. 从而 R 为域.

反过来, 若 R 为域, 则由定理 3 知 $RG\in PF$. 从而命题得证.

参 考 文 献

[1] 周伯埙, 代数 K-理论的起源及其发展概况, 南京大学学报数学半年刊, 1(1987), 91—98.

[2] Lam, T. Y., Serre's Conjecture, Lecture Notes in Math. 935 (1978).

[3] 佟文廷, Grothendieck 群及其应用, 南京大学学报数学半年刊, 3(1986), 1—11.

[4] Faith, C., Algebra Ⅱ, Ring Theory, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

[5] Milnor, J., Introduction to Algebraic K-Theory, Annals of Math. Studies, 72(1971).

[6] Rotman, J.J., An Introduction to Homological Algebra, Acad. Press, 1979.

[7] Silvester, J.R., Introduction to Algebraic K-Theory, Chapman and Hall, 1981.

[8] Connell, G., On the group ring, Canad.J. Math., 15(1963), 650—685.

[9] Karpilovsky, G., Commutative Group Algebras, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1983.

[10] Gilmer, R. and Parker, T., Divisibility properties in semigroup rings, Michigan Math. J., 21 (1974), 65—86.

PF-rings and the Grethendieck groups of groups rings

Tong Wenting

(Nanjing University)

Abstract

Let R be a commutative ring with 1, G an Abelian group, RG the group ring on R and G. In this paper we gave some properties of PF-rings in which f. g. projective modules are free. The Grothendieck groups $K_0(RG)$ for some cases are given. In addition, for the ring R with the unimodular column property, we proved the following result: $K_0(RG)\simeq K_0(R)$, hence if $R\in PF$, then $K_0(RG)\simeq\mathbf{Z}$.