数 学 研 究 与 评 论
第10卷 第2期
1990年5月
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.10 No.2
May. 1990

质环的求导和交换性*

朱孝璋

（天津教育学院）

本文中的环均指结合的．设d是环R的一个可加变换，且对任意$x, y\in R$有

$$d(xy)=d(x)y+xd(y)$$

则称d为R的一个求导．

设R是特征数不为2的质环，d是R的一个非平凡求导．Herstein在文[1]中证得：若对任意$x, y\in R$有$[d(x), d(y)]=0$，则R是交换环．以后，Chung和Luh在文[2]中证明了条件$[d(x), d(y)]=0$与$d^2(x)\in C$（C是R的中心）等价，从而对Herstein的这一结果作了补充．Hirano和Tominaga在文[3]中又将上面两条件中的x, y限制在R的一个非零理想U中而得同样的结论．牛凤文在文[4]中也对Herstein的这一结果作了推广，他证明了：若U是R的一个非零理想，d_1, d_2是R的两个非平凡求导，且对任意$x, y\in U$有$[d_1(x), d_2(y)]=0$，则R是交换环．

下面，我们对上述结果作进一步的推广，先给出

引理1 设R是一个环，C是R的中心，若d是R的一个求导，则$d(C)\subset C$．

引理2[5] 设R是质环，若R含一非零可换单边理想，则R是交换环．

引理3[6] 设R是质环，C是R的中心，若有$c\in C$，$r\in R$且$cr\in C$，则必有$c=0$或$r\in C$．

引理4 设R是质环，U是R的一个非零理想，$d_1, d_2, \cdots, d_n$是R的n个求导，若对任意的$x_1, x_2, \cdots, x_n\in U$有$d_1(x_1)d_2(x_2)\cdots d_n(x_n)=0$，则$d_1, d_2, \cdots, d_n$中至少有一个是平凡的．

证明 当$n=1$时结论是显然的，一般地对n施行归纳即可得证．

引理5 设R是一个环，U是R的一个理想，d是R的一个求导，$V=\{x\in U\mid d(x)\in U\}$，则V是R的一个理想，且$U^2\subset V\subset U$，$d(V)\subset U$．

证明 直接验证可知V是R的理想，且显然有$U^2\subset V\subset U$，$d(V)\subset U$．

现给出

定理1 设R是特征数不为2的质环，d_1与d_2是R的两个非平凡求导，U是R的一个非零理想，若C是R的中心，则以下条件是等价的：

（i）对任意$x\in U$有$d_1d_2(x)\in C$；

（ii）对任意$x, y\in U$有$[d_1(x), d_2(y)]\in C$；

* 1987年12月2日收到．

(iii) 对任意$x, y\in U$有$d_1(x)d_2(y)+d_2(x)d_1(y)\in C$；

(iv) R是交换环.

证明 (i)⇒(iv)任取$x\in U$, $c\in C$, 由$d_1d_2(xc)\in C$, $d_1d_2(x)\in C$, 得$d_1d_2(xc)-d_1d_2(x)c\in C$即

$$d_1(x)d_2(c)+d_2(x)d_1(c)+xd_1d_2(c)\in C, \tag{1}$$

在(1)式中以xc代x并利用(1)及引理1可得

$$2d_1(c)d_2(c)x\in C. \tag{2}$$

现设R不是交换环. 由引理2知$U\not\subset C$, 又R的特征数非2, 由引理3及(2)式得$d_1(c)d_2(c)=0$, 而质环的中心无零因子, 故$d_1(c)=0$或$d_2(c)=0$, 于是$C=K_1\cup K_2$, 这里$K_i=\{c\in C|d_i(c)=0\}$显见K_1, K_2皆C的加法子群, 故有$C=K_1$或$C=K_2$, 即有$d_1(C)=\{0\}$或$d_2(C)=\{0\}$. 断言此时必有$d_1(C)=d_2(C)=\{0\}$. 反之, 设$d_1(C)\neq\{0\}$, $d_2(C)=\{0\}$则有$c\in C$使$d_1(c)\neq 0$由(1)式得$d_2(x)d_1(c)\in C$, 用引理3得$d_2(x)\in C$, 故$d_2^2(x)\in C$, 由前述文[3]之结果得R是交换环, 矛盾. 同样, 当$d_1(C)=\{0\}$时也有$d_2(C)=\{0\}$, 断言成立.

现对任意$x\in U$, 由条件可得

$$d_1d_2(x^2)=2d_1d_2(x)x+d_1(x)d_2(x)+d_2(x)d_1(x)\in C, \tag{3}$$

故$d_1^2d_2(x^2)=0$即

$$4d_1d_2(x)d_1(x)+d_1^2(x)d_2(x)+d_2(x)d_1^2(x)=0. \tag{4}$$

令$V=\{x\in U|d_2(x)\in U\}$, 则由引理5知V是R的理想, 且$V\supset U^2\neq\{0\}$, 故V是R的一个非零理想. 任取$a\in V$, 则$d_2(a)\in U$, 可用$d_2(a)$代(4)中的x, 考虑到$d_1(C)=\{0\}$及$d_1d_2(a)\in C$即知$4d_1d_2^2(a)d_1d_2(a)=0$, 从而$d_1d_2^2(a)=0$或$d_1d_2(a)=0$, 进而可证$d_1d_2^2(V)=\{0\}$或$d_1d_2(V)=\{0\}$由文[4]之引理知$d_1d_2(V)\neq\{0\}$故$d_1d_2^2(V)=\{0\}$, 此时在(3)中以$d_2(a)$代x得$2d_1d_2(a)d_2^2(a)\in C$, 再由引理3得$d_1d_2(a)=0$或$d_2^2(a)\in C$, 又可得$d_1d_2(V)=\{0\}$或$d_2^2(V)\subset C$, 而$d_1d_2(V)\neq\{0\}$故$d_2^2(V)\subset C$, 又由文[3]之结果得R是交换环, 矛盾.

(ii)⇒(iv)先证$d_1(U)\subset C$. 反之, 设$x\in U$而有$d_1(x)\notin C$, 则记d为$d_1(x)$所决定的内求导, 显见d是R的一个非平凡求导, 而对任意$y\in U$, 有$dd_2(y)=[d_1(x), d_2(y)]\in C$, 由上面结果知此时R是交换环, 从而d是平凡的, 矛盾. 故$d_1(U)\subset C$, 从而由引理1得$d_1^2(U)\subset C$, 由文[3]之结果得R是交换环.

(iii)⇒(iv)反设R不是交换环. 对任意$x, y\in R$下记$f(x, y)=d_1(x)d_2(y)+d_2(x)d_1(y)$. 任取$x, y\in U$, $c\in C$由条件$f(x, yc)=f(x, y)c+f(x, c)y\in C$得$f(x, c)y\in C$从而$f(x, c)U\subset C$, 由引理2得$f(x, c)U=\{0\}$, 于是对任意$x\in U$, $c\in C$有

$$f(x, c)=f(c, x)=0. \tag{5}$$

另外, 对任意$x, y, z\in U$, 由$f(x, yz)-f(xy, z)\in C$得$f(x, y)z-f(y, z)x\in C$, 故$f(x, y)[z, x]=0$, $f(x, y)=0$或$[z, x]=0$. 若$x\in C$, 则由(5)式知$f(x, y)=0$, 若$x\notin C$, 由文[5]之引理2此时必有$z\in U$而使得$[z, x]\neq 0$, 故也有$f(x, y)=0$, 所以对任意$x, y\in U$都有$f(x, y)=0$即

$$d_1(x)d_2(y)+d_2(x)d_1(y)=0, \tag{6}$$

在(6)式中以yz代y即得

$$d_1(x)yd_2(z)+d_2(x)yd_1(z)=0. \tag{7}$$

令 V = $x\in U|d_1(x)\in U\}$则对任意 $y\in V$可用 $d_1(y)$代（7）式中的y，于是对任意 $x, y, z\in V$ 有

$$d_1(x)d_1(y)d_2(z)+d_2(x)d_1(y)d_1(z)=0 \tag{8}$$

再由（6）式知 $d_1(x)d_1(y)d_2(z)=d_1(x)(-d_2(y)d_1(z))=d_2(x)d_1(y)d_1(z)$ 故（8）式即 $2d_2(x)d_1(y)d_1(z)=0$，于是 $d_2(x)d_1(y)d_1(z)=0$，而V是R的一个非零理想，由引理 4 即得 d_1, d_2中至少有一个是平凡的，矛盾．

(iv)⇒(i)，(ii)，(iii)是显然的，定理得证．

定理 1 显然推广了上述文献［1—4］的相应结果．下面对一般的质环给出

定理 2 设R是质环，$d_1, d_2, \cdots, d_n$是R的非平凡求导，U是R的一个非零理想，C是R的中心．若对任意 $x_1, x_2, \cdots, x_n\in U$有 $d_1(x_1)d_2(x_2)\cdots d_n(x_n)\in C$，则R是交换环．

证明 任取 $x_1, \cdots, x_n, y\in U$由 $d_1(x_1)d_2(x_2)\cdots d_n(x_ny)\in C$得 $d_1(x_1)d_2(x_2)\cdots d_n(x_n)y+d_1(x_1)\cdots d_{n-1}(x_{n-1})x_nd_n(y)\in C$ 于是

$$[d_1(x_1)\cdots d_{n-1}(x_{n-1})x_nd_n(y), y]=0, \tag{9}$$

现取 $x_n\in V=\{x\in U|d_n(x)\in U\}$，可用 $d_n(x_n)$代（9）式中的 x_n，于是对任意 $x_1, \cdots, x_n, y\in V$有

$$d_1(x_1)\cdots d_n(x_n)[d_n(y), y]=0. \tag{10}$$

因 $d_1, d_2, \cdots, d_n$是R的非平凡求导，V是R的非零理想，由引理 4 有 $x_1, x_2, \cdots, x_n\in V$ 使 $d_1(x_1)d_2(x_2)\cdots d_n(x_n)\neq 0$ 而 $d_1(x_1)d_2(x_2)\cdots d_n(x_n)\in C$ 故由(10)式得 $[d_n(y), y]=0$，由文[3]之命题 1 即得R是交换环，定理得证．

最后，我们指出定理 2 中的条件不能减弱为“$d_1(x)d_2(x)\cdots d_n(x)\in C$，$\forall x\in U$”．因为存在这样的非交换的质环（当然含非平凡的内求导），它对任一内求导 d 都有 $(d(y))^2\in C$，即R适合 $[x, y]^2\in C$．例如，设F是任意一个域，$R=M_2(F)$是F上 2 阶矩阵环，则R显然是非交换的质环，而直接验证可知R适合：对任意 $x, y\in R$有 $[x, y]^2\in C$．

参 考 文 献

［1］Herstein, I. N., A note on derivations, Canad. Math. Bull., 21(1978), 369—370.

［2］Chung, L. O. and Luh Jiang, Derivations of higher order and commutativity of rings, Pacific J. Math., Vol. 99, No.2(1982), 317—326.

［3］Hirano, Y. and Tominaga, H., Some commutativity theorems for prime rings with derivations and differentially semiprime rings, Math. J. Okayama Univ., 26(1984), 101—108.

［4］牛凤文，关于结合环上的微商，数学研究与评论，2(1986)，149—150.

［5］朱孝璋，质环与半质环的一些交换性条件，扬州师院自然科学学报，2(1983)，18—26.

［6］Awtar, R., A remark on the commutativity of certain rings, Proc. Amer. Math. Soc., 41(1973), 370—372.

Derivations and Commutativity of Prime Rings

Zhu Xiaozhang

(Tianjin Education College)

Abstract

In this paper, we generalize some corresponding results of [1—4]. We obtain the main results as the following:

Theorem 1 Let R be a prime ring of characteristic not 2 with nontrivial derivations d_1, d_2 and let U be a nonzero ideal of R. If C is the center of R, then the following conditions are equivalent:

(i) $d_1 d_2(x) \in C$ for all $x \in U$;

(ii) $[d_1(x), d_2(y)] \in C$ for all $x, y \in U$;

(iii) $d_1(x)d_2(y) + d_2(x)d_1(y) \in C$ for all $x, y \in U$;

(iv) R is commutative.

Theorem 2 Let R be a prime ring with nontrivial derivations $d_1, d_2, \cdots, d_n$ and U be a nonzero ideal of R. Let C be the center of R. If $d_1(x_1)d_2(x_2)\cdots d_n(x_n) \in C$ for all $x_1, x_2, \cdots, x_n \in U$, then R is commutative.