第10卷 第2期
1990年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.2
May, 1990

Formanek中心多项式的唯一构作*

郑 玉 美

（湖北大学数学系，武汉）

Formanek构作了历史上第一个中心多项式，其构作方法如下：

令

$$g(x_1,\cdots,x_{m+1})=\prod_{i=2}^{n}(x_1-x_i)(x_{n+1}-x_i)\prod_{2<i<j<n}(x_i-x_j)^2=\sum_{(a)}c_{(a)}x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_{n+1}^{a_{n+1}}$$

此处x_i是可换变元．

将可换变元x_i换成不可换变元X，插进不可换变元y_i，再令

$$G_1=G(X,Y_1,\cdots,Y_n)=\sum_{(a)}c_{(a)}X^{a_1}Y_1X^{a_2}Y_2\cdots X^{a_n}Y_nX^{a_{n+1}}$$

轮换Y_i后得到

$$G_2=G(X,Y_2,Y_3,\cdots,Y_n,Y_1)$$
$$G_3=G(X,Y_3,\cdots,Y_n,Y_1,Y_2)$$

等等，于是$G_1+G_2+\cdots+G_n$就是所希望的中心多项式．

设$X=\mathrm{diag}\{x_1,\cdots,x_n\}$是一般矩阵环中的对角阵，$Y_k=(y_{ij}^{(k)})$是一般$n$阶方阵，此处$x_i$与$y_{ij}^{(k)}$是可换变元．根据$G$中$Y_i$的多重线性及柝梯算法我们有

$$G_k=G(X,Y_k,\cdots,Y_n,Y_1,\cdots,Y_{n-1})=DD_k \tag{1}$$

此处$D=\prod_{1<i<j<n}(x_i-x_j)^2$是$x_i$上的判别式．

$$D_k=\mathrm{diag}\{d_{k1},d_{k2},\cdots,d_{kn}\}$$

且
$$d_{kj}=\sum_{\substack{\pi\in S_n\\ \pi 1=j}}y_{\pi1,\pi2}^{(k)}y_{\pi2,\pi3}^{(k+1)}\cdots y_{\pi n,\pi1}^{(k-1)}\qquad k,j=1,2,\cdots,n.$$

S_n是n阶置换群．

引理1 对于固定的k及适当的$v\neq k$，在d_{k1}的单项式集合中恰有$(n-2)!$个d_{v2}的单项式．

证明 d_{k1}的任一单项有形式$y_{\tau1,\tau2}^{(k)}\cdots y_{\tau n,\tau1}^{(k-1)}$此处$\tau1=1$．于是有某个$l$使得$\tau l=2$．这样就有适当的$v$使得$v=l+k-1$或$l+k-1-n$而使

$$y_{\tau1,\tau2}^{(k)}\cdots y_{\tau n,\tau1}^{(k-1)}=y_{\tau1,\tau(l+1)}^{(v)}\cdots y_{\tau(l-1),\tau1}^{(v-1)}$$

* 1988年11月21日收到．

这也是d_{v2}的一个单项式. 显见$v\neq k$，而且这样的置换使得$\tau(1)=1$, $\tau(l)=2$, 这种置换τ恰有$(n-2)!$个.

对固定的k令设$t=(n-1)!$，d_{k1}的$(n-1)!$个单项式可以写成$a_{(k-1)t+1}$, $a_{(k-1)t+2}$, …, a_{kt}，于是

$$
\begin{aligned}
&d_{11}=a_1+\cdots+a_t\\
&d_{21}=a_{t+1}+\cdots+a_{2t}\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
&d_{n1}=a_{(n-1)t+1}+\cdots+a_{nt}
\end{aligned}
$$

类似地可以写

$$
\begin{aligned}
&d_{12}=b_1+\cdots+b_t\\
&d_{22}=b_{t+1}+\cdots+b_{2t}\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
&d_{n2}=b_{(n-1)t+1}+\cdots+b_{nt}
\end{aligned}
$$

可证有以下事实成立：

$$a_i\neq a_j,\quad b_i\neq b_j\qquad (i\neq j); \tag{2}$$

$$\{a_i\}\to\{b_j\}\text{ 是一个一一对应;} \tag{3}$$

$$\{a_{(j-1)t+1},\cdots,a_{jt}\}\cap\{b_{(j-1)t+1},\cdots,b_{jt}\}=\varnothing; \tag{4}$$

$$\left|\{a_{(j-1)t+1},\cdots,a_{jt}\}\cap\{b_{(v-1)t+1},\cdots,b_{vt}\}\right|=(n-2)!\qquad j\neq v,\ n\geqslant 3. \tag{5}$$

对于$n=2$的简单情况容易证明

定理1 对于$n=2$, G_1与G_2的一切对称函数都是中心的.

证明 事实上

$$G_1=\begin{bmatrix} y_{12}^{(2)}y_{21}^{(1)} & 0\\ 0 & y_{21}^{(2)}y_{12}^{(1)}\end{bmatrix}D\qquad G_2=\begin{bmatrix} y_{12}^{(1)}y_{21}^{(2)} & 0\\ 0 & y_{21}^{(1)}y_{12}^{(2)}\end{bmatrix}D$$

显见G_1+G_2与G_1G_2都是中心的.

从（1）式可以直接证明以下

引理2 设$f(G_1,\cdots,G_n)$是G_i的k次齐次多项式，如果这多项式是整系数的，则

$$f(G_1,\cdots,G_m)=D^k\mathrm{diag}\{f(d_{11},\cdots,d_{n1}),f(d_{12},\cdots,d_{1n}),\cdots,f(d_{1n},\cdots,d_{nn})\} \tag{6}$$

我们可以把d_{11}, d_{21}, …, d_{n1}写成n阶方阵的形式，比如$n=4$时，

$$
\begin{aligned}
&d_{11}=a_1+\cdots+a_6,\qquad d_{21}=a_7+\cdots+a_{12},\\
&d_{31}=a_{13}+\cdots+a_{18},\qquad d_{41}=a_{19}+\cdots+a_{24},
\end{aligned}
$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a_1+a_2 & a_3+a_4 & a_5+a_6\\ a_7+a_8 & 0 & a_9+a_{10} & a_{11}+a_{12}\\ a_{13}+a_{14} & a_{15}+a_{16} & 0 & a_{17}+a_{18}\\ a_{19}+a_{20} & a_{21}+a_{22} & a_{23}+a_{24} & 0\end{bmatrix}$$

其中第(i,j)位置的元素恰是$\{d_{i1}\}\cap\{d_{j2}\}$，即d_{i1}的单项式集与d_{j2}的单项式集的交集中的单项式之和，这种写法对于一般的n均可办到.

我们有如下(证明略去)

引理 3 存在一个 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$，其中 a_{ij} 是 d_{i1} 与 d_{j2} 的公共单项式之和，显然，$a_{ii}=0$，行和 $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}=d_{j1}$ 列和 $\sum_{k=1}^{n} a_{kj}=d_{j2}$.

我们知道一个 k 次齐次整系数多项式可以写成

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{\substack{a=(a_1,\cdots,a_n)\\ a_1+\cdots+a_n=k\\ a_i\geq 0}} c_{(a)}x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n} \qquad (7)$$

现在规定一个群作用：$\forall \pi\in S_n$，

$$\pi(a)=(a_{\pi 1},a_{\pi 2},\cdots,a_{\pi n})$$

我们可以证明

引理 4 如果 $f(d_{11},\cdots,d_{n1})=f(d_{12},\cdots,d_{n2})$，则对于任何 $\pi\in S_n$ 及(7)中的 a，$c_{(a)}=c_{(\pi a)}$

证明 据引理3，

$$f(d_{11},\cdots,d_{n1})=\sum_a c_{(a)}(a_{11}+\cdots+a_{1n})^{a_1}\cdots(a_{n1}+\cdots+a_{nn})^{a_n}$$

而右边的

$$f(d_{12},\cdots,d_{n2})=\sum_\beta c_{(\beta)}(a_{11}+\cdots+a_{n1})^{\beta_1}\cdots(a_{1n}+\cdots+a_{nn})^{\beta_n}$$

对任意的 $\pi\in S_n$，必有适当的分拆 β，使得

$$c_{(a)}a_{1,\pi 1}^{a_1}a_{2,\pi 2}^{a_2}\cdots a_{n,\pi n}^{a_n}=c_{(\beta)}a_{1,\pi 1}^{\beta_{\pi 1}}a_{2,\pi 2}^{\beta_{\pi 2}}\cdots a_{n,\pi n}^{\beta_{\pi n}}$$

这推出 $\pi(\beta)=a$，即 $\beta=\pi(a)$ 且 $c_{(\beta)}=c_{(\pi a)}=c_{(a)}$.

如果 $\pi\in S_n$，则说 $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$ 与 $x_1^{a_{\pi 1}}x_2^{a_{\pi 2}}\cdots x_n^{a_{\pi n}}$ 是同型的，于是当 $f(d_1,\cdots,d_{n1})=f(d_{12},\cdots,d_{n2})$ 时 f 总可以写成同型项的和的形式. 现在令 J 是不同型的集合，即每个同型项取一个代表元组成的集合，故有

$$\begin{aligned} f(d_{11},\cdots,d_{n1}) &=\sum_{a\in J} c_{(a)}\sum_{\pi\in S_n} d_{11}^{a_{\pi 1}}d_{21}^{a_{\pi 2}}\cdots d_{n1}^{a_{\pi n}} \\ &=\sum_{\beta\in J} c_{(\beta)}\sum_{\tau\in S_n} d_{12}^{\beta_{\tau 1}}d_{22}^{\beta_{\tau 2}}\cdots d_{n2}^{a_{\tau n}}=f(d_{12},\cdots,d_{n2}) \end{aligned} \qquad (8)$$

引理 5 如果 $f(d_{11},\cdots,d_{n1})=f(d_{12},\cdots,d_{n2})$，则对于 $a=(a_1,\cdots,a_n)$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，我们有

$$c_{(a)}a_1!\cdots a_n!=c_{(\beta)}\beta_1!\cdots\beta_n!$$

证明 考虑(8)式左端的展开式中的一项

$$c_{(a)}\frac{a_1!}{a_{11}!\cdots a_{1n}!}(a_{11}^{a_{11}}\cdots a_{1n}^{a_{1n}})\cdots\frac{a_n!}{a_{n1}!\cdots a_{nn}!}(a_{n1}^{a_{n1}}\cdots a_{nn}^{a_{nn}})$$

设 $\beta_1=a_{11}+\cdots+a_{n1}$，$\beta_2=a_{12}+\cdots+a_{n2},\cdots$，$\beta_n=a_{1n}+\cdots+a_{nn}$ 及 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$.
这一项等于(8)式右端的

$$c_{(\beta)}\frac{\beta_1!\cdots\beta_n!}{(a_{11}!\cdots a_{n1}!)\cdots(a_{1n}!\cdots a_{nn}!)}(a_{11}^{a_{11}}\cdots a_{n1}^{a_{n1}})\cdots(a_{1n}^{a_{1n}}\cdots a_{nn}^{a_{nn}})$$

这推出 $\qquad c_{(a)}a_1!\cdots a_n!=c_{(\beta)}\beta_1!\cdots\beta_n!$

引理 6 如果 $f(d_{11},\cdots,d_{n1})=f(d_{12},\cdots,d_{n2})$，则必存在整数 m 使得 $f(x_1,\cdots,x_n)=m(x_1+\cdots+x_n)^k$.

证明 令 $m=c_{(\alpha)}$，此处 $\alpha=(k,0,\cdots,0)$.
据引理5对任意 β 有

$$c_{(\beta)}\beta_1!\cdots\beta_n!=mk!$$

即

$$c_{(\beta)}=m\cdot\frac{k!}{\beta_1!\cdots\beta_n!}$$

这恰好是 $m(x_1+\cdots+x_n)^k$ 中分拆 β 对应的单项式的系数．于是

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_\beta c_{(\beta)}x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}=m(x_1+\cdots+x_n)^k.$$

引理6告诉我们，如果 G_i 的 k 次齐次整系数多项式 $f(G_1,\cdots,G_n)$ 是中心的，则 $f(d_{11},\cdots,d_{n1})=f(d_{12},\cdots,d_{n2})$，从而 $f(x_1,\cdots,x_n)=m(x_1+\cdots+x_n)^k$．换言之我们得到了

定理 2 对于 $n\geqslant 3$，如果 k 次齐次整系数多项式 $f(x_1,\cdots,x_n)\neq m(x_1+\cdots+x_n)^k$，$m\in\mathbf{Z}$，则 $f(G_1,\cdots,G_n)$ 不是中心多项式．

本文最后证明一个更一般的结论

定理 3 对于 $n\geqslant 3$，除了 $f(G_1,\cdots,G_n)=g(G_1+\cdots+G_n)$ 此处 $g(x)\in\mathbf{Z}[x]$，任何整系数多项式 $f(G_1,\cdots,G_n)$ 都不是中心多项式．

证明 任何多项式可以写成如下一些齐次多项式的和．

$$f(x_1,\cdots,x_n)=f_0+f_1(x_1,\cdots,x_n)+\cdots+f_m(x_1,\cdots,x_n) \tag{9}$$

此处 f_j 是 j 次齐次的，据引理2，

$$f_i(G_1,\cdots,G_n)=D^i\operatorname{diag}\{f_i(d_{11},\cdots,d_{n1}),\ f_i(d_{12},\cdots,d_{n2}),\cdots\}$$

于是

$$f(G_1,\cdots,G_n)=f_0+\operatorname{diag}\{\sum_{i=1}^m D^if_i(d_{11},\cdots,d_{n1}),\sum_{j=1}^m D^jf_j(d_{12},\cdots,d_{n2}),\cdots\}$$

如果 $f(G_1,\cdots,G_n)$ 是中心的，则

$$\sum_{i=1}^m D^if_i(d_{11},\cdots,d_{n1})=\sum_{j=1}^m D^jf_j(d_{12},\cdots,d_{n2})$$

从而对每个 i（$1\leqslant i\leqslant m$）有 $f_i(d_{11},\cdots,d_{n1})=f_i(d_{12},\cdots,d_{n2})$ 再据引理6，有某个 $m_i\in\mathbf{Z}$，使得

$$f_i(x_1,\cdots,x_n)=m_i(x_1+\cdots+x_n)^i$$

于是

$$f(x_1,\cdots,x_n)=f_0+m_1(x_1+\cdots+x_n)+m_2(x_1+\cdots+x_n)^2+\cdots$$

令

$$g(x)=f_0+m_1x+m_2x^2+\cdots$$

则

$$f(G_1,\cdots,G_m)=g(G_1+\cdots+G_n)$$

以色列数学家 Rosset [3] 提出一个问题：以 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 作成的一切对称函数是否是中心的．这一问题对可除代数结构的研究有十分重要的作用，他证明了不是所有的这种对称函数都是中心的．由本文的定理3可以直接断言，对于 $n\geqslant 3$，除了 $f(G_1+\cdots+G_n)$ 外，每个 G_i 的对称函数都不是中心的．事实上，本文证明了由 G_i 作成的多项式 $f(G_1,\cdots,G_m)$ 是中心的．当且仅当 $f(G_1,\cdots,G_n)=g(G_1+\cdots+G_n)$．因此，从这层意义讲，Formanek 构作的第一个中心多项式是唯一的．

参 考 文 献

[1] Formanek. E. Central Polynomials for Matrix Rings J. Algebra. 23. 129—133.

[2] Procesi. C. Rings with Polynomial Identities. Dekker, New york, 1973.

[3] Rosset. S. A Note on Symmetric Functions in Formanek Polynomials. Pro of the Amera. M. S. Vol 50. 127—130.

[4] Rowen. L. Polynomial Identities in Ring Theory. 1980, Academic Press, Inc.,

Unique Constrution of Formanek Central Polynomial

Zheng Yumei

(Department of Mathematics, Hubei University)

Abstract

Formanek constructed the first central polynomial. i.e. $G_1+G_2+\cdots+G_n$ where $G_1=G(x, y_1, \cdots, y_n)$, $G_2=G(x, y_2, y_3, \cdots, y_n, y_1)$ etc. Are called Formanek's polynomials. Rosset in his nota [3] raised the question that whether all sgmmetic polynomials in G_i also give central polynomials. He showed that the basic sgmmetric polynomials in G_i are not all central. In this paper we shall show, for $n \geqslant 3$ each polynomial in G_i is not central, except $f(G_1+\cdots+G_n)$, where $f(x)$ is a polynomial at x. Hence Formanek's central polynomial is unique in some sense.

接176 页

References

[1] O. P. Ahuja, Integral operators of certain univalent functions, Internat. J. Math. & Math. Sci. 8 (1985), 653—662.