第10卷 第2期
1990年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.10 No.2
May. 1990

椭圆型方程广义解的Liouville定理*

梁鋆廷

（中山大学数学系，广州）

摘 要

在 n 维欧氏空间 E^n 中考虑方程

$$\operatorname{div}\vec{A}(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u)$$

并证明广义解的Liouville定理成立，其中设 $\vec{A}$、B 满足结构条件：

$$\nabla u\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u) > |\nabla u|^p, \quad p>1$$

$$|\vec{A}(x,u,\nabla u)| < k|\nabla u|^{p-1}, \quad k>1$$

$$|B(x,u,\nabla u)| < b(x)|\nabla u|^{p-1},$$

$$b(x)\in L_\infty(E^n) \text{ 并且 } b(x) = O(\frac{1}{|x|}) \quad \text{当 } |x|\to\infty.$$

调和函数的Liouville 定理是周知的，后者还可推广到某些二阶椭圆型方程的古典解的情形，例如见Gilbarg－Trudinger[1]第三章，系3.12．现在本文将进一步把调和函数的Liouville 定理推广到下面的散度型主部的椭圆型方程

$$\operatorname{div}\vec{A}(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u) \tag{1}$$

的广义解的情形．设 $\vec{A}(x, u, \xi)$ 和 $B(x, u, \xi)$ 分别在 $E^n\times E^1\times E^n$ 上定义并且当 x 固定时关于 u,ξ 为连续，当 u,ξ 固定时关于 x 为可测．此外，设下面的结构条件满足：

$$\nabla u\cdot\vec{A}(x, u, \nabla u)\geqslant|\nabla u|^p, \quad p>1 \tag{2}$$

$$|\vec{A}(x, u, \nabla u)|\leqslant k|\nabla u|^{p-1} \quad k\geqslant1 \tag{3}$$

$$|B(x, u, \nabla u)|\leqslant b(x)|\nabla u|^{p-1}, \tag{4}$$

$$b(x)\in L_\infty(E^n) \text{ 并且 } b(x) = O(\frac{1}{|x|}) \quad \text{当 } |x|\to\infty \tag{5}$$

u 称为是方程(1)的广义解，如果对任何 $G\subset\subset E^n$

$$u\in W_p'(G) \tag{6}$$

并且满足

$$\int_G\{\nabla v\cdot\vec{A}(x, u, \nabla u) + vB(x, u, \nabla u)\}\,dx = 0 \qquad \forall v\in \mathring{W}_p'(G) \tag{7}$$

记 $B(\rho) = \{|x|<\rho\}$, $\partial B(\rho) = \{|x| = \rho\}$．

引理1 设 $\rho_0>\rho_1>0$, $\Omega = B(\rho_0)\setminus B(\rho_1)$，那么对任何 $u\in W_p'(\Omega)$，$1<p<n$，成立

* 1988年10月17日收到．1989年3月21日收到修改稿．

$$\left(\int_\Omega |u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(n, p, \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)\left(\int_\Omega \left[\,|\nabla u|^p + \left(\frac{1}{\rho_1}|u|\right)^p\right] dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \quad (\text{下同}).$$

证明 通过伸缩变换 $x = \rho_0 y$ 把 Ω 变为 $\Omega' = B(1) \setminus B(\frac{\rho_1}{\rho_0})$，然后应用Соболев嵌入定理即可导得欲证.

引理 2 设 $\rho_0 > \rho_1 > 0$，$\Omega = B(\rho_0) \setminus B(\rho_1)$，$S \subset \Omega$ 满足 $\operatorname{mes} S \geqslant \theta \operatorname{mes} \Omega$，$\theta \in (0,1)$. 设 $u \in W_p^1(\Omega)$，$1 < p < n$，并且 u 在 S 上取值为0，那么

$$\left(\int_\Omega |u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(n, p, \theta, \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明 根据引理1，只需证

$$\int_\Omega |u|^p dx \leqslant C\left(n, p, \theta, \frac{\rho_0}{\rho_1}\right) \rho_0^p \int_\Omega |\nabla u|^p dx$$

用反证法证明. 设不然，那么可以找到 $u_\nu \in W_p^1(\Omega)$，满足

$$u_\nu|_{S_\nu} = 0,\ S_\nu \subset \Omega,\quad \operatorname{mes} S_\nu \geqslant \theta \operatorname{mes}\Omega$$

$$\int_\Omega |u_\nu|^p d\lambda \geqslant \nu \rho_0^p \int_\Omega |\nabla u_\nu|^p dx \tag{8}$$

对 u_ν 规范化，可以认为

$$\int_\Omega |u_\nu|^p dx = 1.$$

根据（8），u_ν 在 $W_p^1(\Omega)$ 中为有界，因而在 u_ν 中有子列不妨设是 u_ν 自身，在 $W_p^1(\Omega)$ 中弱收敛于某个 $u_0 \in W_p^1(\Omega)$. 后者满足

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^p dx \leqslant \lim_{\nu\to\infty} \inf \int_\Omega |\nabla u_\nu|^p dx = 0.$$

于是 $u_0 = \text{const}$. 考虑到Соболев嵌入定理的紧性，我们有

$$\int_\Omega |u_\nu - u_0|^p dx \to 0 \qquad \text{当 } \nu \to \infty$$

从而

$$\int_\Omega |u_0|^p dx = \lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega |u_\nu|^p dx = 1,\quad u_0 = \text{const} \neq 0.$$

另方面，

$$\int_\Omega |u_\nu - u_0|^p dx \geqslant \int_{S_\nu} |u_\nu - u_0|^p dx = \int_{S_\nu} |u_0|^p dx$$

$$= |u_0|^p \operatorname{mes} S_\nu \geqslant |u_0|^p \theta \operatorname{mes}\Omega > 0$$

矛盾！引理2于是获证.

定理 设 u 是方程（1）的广义解，设条件（2）～（5）满足. 那么，如果存在 $\rho_0' > 0$ 使 $\omega(\rho_0') > 0$，则成立

$$\omega(\rho) \geqslant C\left(\frac{\rho}{\rho_0'}\right)^\lambda \omega(\rho_0') \qquad \forall \rho \geqslant \rho_0' \tag{9}$$

其中 $C > 0$，$\lambda > 0$ 是常数，和 u, ρ, ρ_0' 无关.

$$\omega(\rho) = \operatorname*{vrai\ max}_{B(\rho)} u - \operatorname*{vrai\ min}_{B(\rho)} u$$

根据定理，如果u在E^n为有界，那么u只能是常数，否则的话，根据(9)，当$\rho\to\infty$时，$\omega(\rho)\to\infty$，矛盾！完全类似地，如果

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{|u(x)|}{|x|^{\lambda}}=0 \quad (\lambda>0\text{ 为(9)中出现的常数})$$

那么u只能是常数.

定理的证明 如所已知，在定理1的假定下，方程(7)的解$u\in W_p^{\prime}(G)$在G内局部有界，因而u作为(1)的广义解在任何紧集$G\subset\subset E^n$上为有界. 于是对任何$\rho\in(0,+\infty)$

$$M(\rho)=\operatorname*{vari\ max}_{B(\rho)}u<+\infty,\quad m(\rho)=\operatorname*{vrai\ min}_{B(\rho)}u>-\infty$$

设$\rho\geqslant\rho_0'$. 如果

$$\operatorname{mes}(\{B(5\rho)\setminus B(3\rho)\}\cap\{u<\frac{1}{2}(M(8\rho)+m(8\rho))\})\geqslant\frac{1}{2}\operatorname{mes}\{B(5\rho)\setminus B(3\rho)\} \tag{10}$$

我们要证

$$w=\ln\frac{\omega(8\rho)}{2(M(8\rho)+\varepsilon-u)}\qquad(\varepsilon>0) \tag{11}$$

在$B(5\rho)\setminus B(3\rho)$上有和$\varepsilon$无关的上界.

为此，我们注意由于(5)，可以取$\kappa_1>0$足够大，使

$$|b(x)|\leqslant\frac{\kappa_1}{\rho}\quad\text{当 }\rho>\rho_0'>0. \tag{5'}$$

下面首先证明

$$\int_{B(6\rho)\setminus B(2\rho)}|\nabla w|^p\mathrm{d}x\leqslant C(n,p,\kappa,\kappa_1)\rho^{n-p},\ \rho>\rho_0'. \tag{12}$$

设$\zeta(x)=\zeta(|x|)$是$|x|$的逐段为线性的连续函数，满足

$$\zeta(x)=\begin{cases}0 & \text{当 }|x|\leqslant\rho\text{ 或 }|x|\geqslant7\rho\\ 1 & \text{当 }2\rho\leqslant|x|\leqslant6\rho\end{cases}\quad\text{和}\quad|\nabla\zeta(x)|\leqslant\frac{1}{\rho}.$$

设$\tau=\dfrac{p^2}{p-1}$，那么

$$v=\frac{\zeta^{\tau}}{(M(8\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}\in\mathring{W}_p^{\prime}(B(8\rho))\cap L_{\infty}(B(8\rho)) \tag{13}$$

可以取作试验函数，代入(7)(取其中的$G=B(8\rho)$)给出

$$\mathrm{I}'+\mathrm{II}'+\mathrm{III}'=0, \tag{14}$$

$$\mathrm{I}'=\int_{B(8\rho)}\frac{(p-1)\zeta^{\tau}\nabla u}{(M(8\rho)+\varepsilon-u)^{p}}\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{II}'=\int_{B(8\rho)}\frac{\tau\zeta^{\tau-1}\nabla\zeta}{(M(8\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{III}'=\int_{B(8\rho)}\frac{\zeta^{\tau}}{(M(8\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}\cdot B(x,u,\nabla u)\mathrm{d}x.$$

利用结构条件(2)、(3)，即见成立

$$\mathrm{I}'\geqslant(p-1)\int_{B(8\rho)}\zeta^{\tau}|\nabla w|^p\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{II}'\leqslant\tau\kappa\int_{B(8\rho)}\zeta^{\tau-1}|\nabla\zeta||\nabla w|^{p-1}\mathrm{d}x$$

$$(\tau-1=p+\frac{1}{p-1})$$

$$\leqslant\delta\int_{B(8\rho)}\zeta^{\tau}|\nabla w|^{p}\mathrm{d}x+C(\delta,\tau\kappa)\int_{B(8\rho)}\zeta^{\overline{\frac{p}{p-1}}}|\nabla\zeta|^{p}\mathrm{d}x$$

其中 $\delta>0$ 可为任何正数，$C(\delta,\tau\kappa)$ 是依赖于对它所标出的量的常数. 联合(4)、(5)$'$，我们得到Ⅲ$'$的估计式如下(注意积分的有效区域包含在 $B(8\rho)\setminus B(\rho)$)：

$$\text{Ⅲ}'\leqslant\int_{B(8\rho)\setminus B(\rho)}\zeta^{\tau}b(x)|\nabla u|^{p-1}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\delta\int_{B(8\rho)}\zeta^{\tau}|\nabla w|^{p}\mathrm{d}x+C(\delta)\int_{B(8\rho)\setminus B(\rho)}\zeta^{\overline{\frac{p}{p-1}}}|b(x)|^{p}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\delta\int_{B(8\rho)}\zeta^{\tau}|\nabla w|^{p}\mathrm{d}x+C(n,p,\kappa,\delta)\rho^{n-p}\quad,\quad\rho\geqslant\rho_0'$$

取定 $\delta>0$ 足够小时联合以上结果，由(14)解得

$$\int_{B(8\rho)}\zeta^{\tau}|\nabla w|^{p}\mathrm{d}x\leqslant C(n,p,\kappa,\kappa_1)\rho^{n-p}\quad,\quad\rho\geqslant\rho_0'$$

考虑到 $\zeta(x)$ 的定义，由上式即得(12).

由于(10)，成立

$$\mathrm{mes}(\{B(5\rho)\setminus B(3\rho)\}\cap\{w\leqslant0\})\geqslant\mathrm{mes}(\{B(5\rho)\setminus B(3\rho)\}\cap\{u>\frac{1}{2}(M(8\rho)+$$

$$+m(8\rho))\})\geqslant\frac{1}{2}\mathrm{mes}\{B(5\rho)\setminus B(3\rho)\}\geqslant\frac{1}{2}(\frac{5^n-3^n}{6^n})\mathrm{mes}B(6\rho).$$

取 $S=\{B(5\rho)\setminus B(3\rho)\}\cap\{w\leqslant0\}$，$\Omega=B(6\rho)\setminus B(2\rho)$，如果 $1<p<n$，对 w^+ 应用引理2再利用(12)，即得

$$\int_{B(6\rho)\setminus B(2\rho)}w^+\mathrm{d}x\leqslant C(n,p)\rho^{n(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n})}(\int_{B(6\rho)\setminus B(2\rho)}|w^+|^{q}\mathrm{d}x)^{\frac{1}{q}}\leqslant C\rho^{n},\quad\rho\geqslant\rho_0'\qquad(15)$$

其中 $C=C(n,p,\kappa,\kappa_1)>0$. 如果 $p\geqslant n$，取 $1<p'<n$ 和

$$\frac{1}{q'}=\frac{1}{p'}-\frac{1}{n}>0$$

根据同样的道理，成立

$$\int_{B(6\rho)\setminus B(2\rho)}w^+\mathrm{d}x\leqslant C(n,p')\rho^{n(1-\frac{1}{p'}+\frac{1}{n})}(\int_{B(6\rho)\setminus B(2\rho)}|w^+|^{q'}\mathrm{d}x)^{\frac{1}{q'}}.$$

$$\leqslant C(n,p')\rho^{n(1-\frac{1}{p'}+\frac{1}{n})}(\int_{B(6\rho)\setminus B(2\rho)}|\nabla w|^{p'}\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leqslant C\rho^{n(1-\frac{1}{p'}+\frac{1}{n})}\mathrm{mes}^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}}B(6\rho)(\int_{B(6\rho)\setminus B(2\rho)}|\nabla w|^{p}\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}\leqslant C\rho^{n},\quad\rho\geqslant\rho_0'\qquad(15)'$$

(15)$'$中的常数现在还要依赖于 p'.

设 $0\leqslant\rho_1<\rho_0\leqslant\rho$，设 $\eta(x)=\eta(|x|)$ 是 $|x|$ 的逐段为线性的连续函数，满足

$$\eta(x)=\begin{cases}0 & 当\ |x|\leqslant3\rho-\rho_0\ 或\ |x|\leqslant5\rho+\rho_0\\ 1 & 当\ 3\rho-\rho_1\leqslant|x|\leqslant5\rho+\rho_1\end{cases}\quad 和\ |\nabla\eta(x)|\leqslant\frac{1}{\rho_0-\rho_1}$$

对任意实数 $k\geqslant0$，取

$$v=\frac{\eta^{\tau}(w-k)^{+}}{(M(8\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}} \qquad (w-k)^{+}=\max(w-k,0) \tag{16}$$

那么 $v\in \mathring{W}_p^{\prime}(B(8\rho))\cap L_\infty(B(8\rho))$. 用 v 作试验函数代入(7)(再一次取其中的 $G=B(8\rho)$), 给出

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}=0 \tag{17}$$

$$\mathrm{I}=\int_{\Omega(k)}\frac{\eta^{\tau}\nabla(w-k)\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)}{(M(8\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{II}=\int_{\Omega(k)}\frac{\eta^{\tau}(w-k)(p-1)\nabla u\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)}{(M(8\rho)+\varepsilon-u)^{p}}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{III}=\int_{\Omega(k)}\frac{\tau\eta^{\tau-1}(w-k)\nabla\eta\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)}{(M(8\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{IV}=\int_{\Omega(k)}\frac{\eta^{\tau}(w-k)B(x,u,\nabla u)}{(M(8\rho)+\varepsilon-u)^{p-1}}\mathrm{d}x$$

其中 $\Omega(k)=\{B(5\rho+\rho_0)\setminus B(3\rho-\rho_0)\}\cap\{w>k\}$ 为积分的有效区域. 利用结构条件(2)~(4)、(5)′, 经过常规的计算, 我们得到如下的估计式:

$$\mathrm{I}\geqslant\int_{\Omega(k)}\frac{\eta^{\tau}\nabla u\cdot\vec{A}(x,u,\nabla u)}{(M(8\rho)+\varepsilon-u)^{p}}\mathrm{d}x\geqslant\int_{\Omega(k)}\eta^{\tau}|\nabla w|^{p}\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{II}\geqslant\int_{\Omega(k)}(p-1)\eta^{\tau}(w-k)|\nabla w|^{p}\mathrm{d}x;$$

$$\begin{aligned}\mathrm{III}&\leqslant\tau\kappa_1\int_{\Omega(k)}\eta^{\tau-1}|\nabla\eta|(w-k)|\nabla w|^{p-1}\mathrm{d}x\\&\leqslant\delta\int_{\Omega(k)}\eta^{\tau}(w-k)|\nabla w|^{p}\mathrm{d}x\\&\quad+C(\delta,\tau\kappa)\int_{\Omega(k)}\eta^{\frac{p}{p-1}}|\nabla\eta|^{p}(w-k)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{IV}&\leqslant\int_{\Omega(k)}\eta^{\tau}(w-k)b(x)|\nabla w|^{p-1}\mathrm{d}x\\&\leqslant\delta\int_{\Omega(k)}\eta^{\tau}(w-k)|\nabla w|^{p}\mathrm{d}x+C(\delta)\int_{\Omega(k)}\eta^{\tau}(w-k)|b(x)|^{p}\mathrm{d}x\\&\leqslant\delta\int_{\Omega(k)}\eta^{\tau}(w-k)|\nabla w|^{p}\mathrm{d}x+\frac{C(n,p,\kappa_1,\delta)}{\rho^{p}}\int_{\Omega(k)}\eta^{\tau}(w-k)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

联合以上结果并取 $\delta>0$ 足够小, 由(17)我们可以解出

$$\int_{\Omega(k)}\eta^{\tau}|\nabla w|^{p}\mathrm{d}x\leqslant C\left(\frac{1}{(\rho_0-\rho_1)^{p}}+\frac{1}{\rho^{p}}\right)\int_{\Omega(k)}\eta^{\frac{p}{p-1}}(w-k)\mathrm{d}x \tag{18}$$

其中的常数 $C=C(n,p,\kappa,\kappa_1)>0$ 和 w,k,ρ_0,ρ_1,ρ 都无关. 根据(18), 如果 $1<p<n$, 象推导(15)那样,

$$\begin{aligned}&\int_{\{B(5\rho+\rho_1)\setminus B(3\rho-\rho_1)\}\cap\{w>k\}}(w-k)\mathrm{d}x\\&\leqslant C\,\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}\Omega(k)\left(\int_{\{B(5\rho+\rho_1)\setminus B(3\rho-\rho)\}\cap\{w>k\}}(w-k)^{q}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant C\,\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}\Omega(k)\left(\int_{\Omega(k)}\eta^{\tau}|\nabla w|^{p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

$$\leqslant C(\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}\Omega(k)(\frac{1}{\rho_0-\rho_1}+\frac{1}{\rho})(\int_{\Omega(k)}(w-k)\,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}} \tag{19}$$

其中的常数 $C=C(n,p,\kappa,\kappa_1)>0$. 而当 $p<n$ 时，固定一个 $p'\in(1,n)$，象推导(15)′那样，再一次可以得到(19)，只是常数 $C>0$ 现在还需依赖于 p'.

根据(19)，对任何实数 $h>k\geqslant 0$, 继续有

$$(h-k)\,\mathrm{mes}(\{B(5\rho+\rho_1)\setminus B(3\rho-\rho_1)\}\cap\{w>h\})$$
$$\leqslant\int_{\{B(5\rho+\rho_1)\setminus B(3\rho-\rho_1)\cap\{w>k\}}(w-k)\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}\Omega(k)(\frac{1}{\rho_0-\rho_1}+\frac{1}{\rho})(\int_{\Omega(k)}(w-k)\,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}; \tag{20}$$
$$\int_{\{B(5\rho+\rho_1)\setminus B(3\rho-\rho_1)\}\cap\{w>h\}}(w-h)\,\mathrm{d}x<\int_{\{B(5\rho+\rho_1)\setminus B(3\rho-\rho_1)\}\cap\{w>k\}}(w-k)\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}\Omega(k)(\frac{1}{\rho_0-\rho_1}+\frac{1}{\rho})(\int_{\Omega(k)}(w-k)\,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}. \tag{21}$$

对 $\nu=0,1,2,\cdots\cdots$ 置

$$\rho_\nu=\frac{\rho}{2^\nu}\ ,\quad k_\nu=2H-\frac{H}{2^\nu}\quad (H>0\text{ 待定})$$
$$\Omega_\nu=\{B(5\rho+\rho_\nu)\setminus B(3\rho-\rho_\nu)\}\cap\{w>k_\nu\}$$
$$J_\nu=\int_{\Omega_\nu}(w-k_\nu)\,\mathrm{d}x$$

那么，由于(20)、(21)中的常数 $c>0$ 和 w、k、h、ρ_0、ρ_1, ρ 都无关，分别用 ρ_ν、$\rho_{\nu+1}$ 取代 ρ_0、ρ_1，用 $k_{\nu+1}$ · k_ν 取代 h、k，分别由(20)、(21)给出

$$\frac{H}{2^{\nu+1}}\mathrm{mes}\,\Omega_{\nu+1}<C\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}\Omega_\nu(1+2^{\nu+1})\rho^{-1}J_\nu^{\frac{1}{p}}\quad ,$$
$$J_{\nu+1}<C\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}\Omega_\nu(1+2^{\nu+1})\rho^{-1}J_\nu^{\frac{1}{p}} \tag{22}$$

根据(15)或(15)′，成立

$$k\,\mathrm{mes}(\{B(6\rho)\setminus B(2\rho)\}\cap\{w>k\})$$
$$<\int_{B(6\rho)\setminus B(2\rho)}w^+\,\mathrm{d}x<C\rho^n$$

其中的常数 $C>0$ 和 w、k、ρ 无关. 因此，对任何预先给定的 $\theta>0$, 我们可以确定一个 $H_0>0$, 使 $H\geqslant H_0$ 成立

$$\mathrm{mes}\Omega_0=\mathrm{mes}(B(6\rho)\setminus B(2\rho)\}\cap\{w>H\})<\frac{C}{H_0}\rho^n<\theta\rho^n\quad , \tag{23}$$

同时

$$J_0=\int_{\{B(6\rho)\setminus B(2\rho)\}\cap\{w>H\}}(w-H)\,\mathrm{d}x<\int_{B(6\rho)\setminus B(2\rho)}w^+\mathrm{d}x<\Lambda\rho^n \tag{24}$$

其中的 $\Lambda>0$ 是出现在(16)或(16)′中的常数，它和 w、H、ρ 无关. 现在设业已证明

$$\mathrm{mes}\Omega_\nu<\delta^\nu\theta\rho^n,\quad J_\nu<\delta^\nu\Lambda\rho^n \tag{25}$$

那么，利用(22)、(25)，继续有

$$\operatorname{mes}\Omega_\nu < \delta^\nu \rho^n \frac{\theta^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}} \Lambda^{\frac{1}{p}} 8C}{H} \cdot (\delta^{\frac{1}{n}} 4)^\nu$$

$$J_{\nu+1} < \delta^\nu \rho^n \Lambda^{\frac{1}{p}} \theta^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}} 4C(\delta^{\frac{1}{n}} 2)^\nu \tag{26}$$

其中的常数 $C>0$ 是出现在(22)中的常数．倘若我们一开始就取定δ、θ，使

$$\delta^{\frac{1}{4}} 4 = 1, \qquad \theta^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}} 4C \leqslant \Lambda^{1-\frac{1}{p}} \delta \tag{27$_1$}$$

然后再取 $H > H_0$ 使

$$\frac{\theta^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}} \Lambda^{\frac{1}{p}} 8C}{H} < \theta\delta \tag{27$_2$}$$

那么(25)继续对$\nu+1$成立．于是由归纳法，(25)无例外地对一切正整数ν成立．然后我们有

$$\operatorname{mes}(\{B(5\rho) \setminus B(3\rho)\} \cap \{\omega > 2H\}) = \lim_{\nu\to\infty} \Omega_\nu = 0.$$

根据w的定义，上式隐含了

$$\operatorname*{vrai\ max}_{B(5\rho)\setminus B(3\rho)} u < M(8\rho) + \varepsilon - \frac{1}{2} e^{-2H} \omega(8\rho)$$

命$\varepsilon \to 0$并考虑到解的最大值原理[2]，我们有

$$\operatorname*{vrai\ max}_{B(\rho)} u < \operatorname*{vrai\ max}_{B(4\rho)} u = \operatorname*{vrai\ max}_{\partial B(4\rho)} u$$

$$< \operatorname*{vrai\ max}_{B(5\rho)\setminus B(3\rho)} u < M(8\rho) - \frac{1}{2} e^{-2H} \omega(8\rho)$$

从而

$$\omega(\rho) < \frac{1}{2}(1 - e^{-2H}) \omega(8\rho) \quad \rho > \rho_6 \tag{28}$$

根据(23)、$(27)_1$ 和$(27)_2$，H和ρ 无关．

如果(10)不成立，那么显然有

$$\operatorname{mes}\{B(5\rho) \setminus B(3\rho)\} \cap \{u > \frac{1}{2}(M(8\rho) m(8\rho))\}) > \frac{1}{2} \operatorname{mes}\{B(5\rho) \setminus B(3\rho)\} \tag{10$'$}$$

这时，代替ω我们考虑

$$\omega_1 = \ln \frac{\omega(8\rho)}{2(u + \varepsilon - m(8\rho))} \tag{11$'$}$$

并用

$$v = \frac{\zeta^\tau}{(u + \varepsilon - m(8\rho))^{p-1}} \quad 和 \quad v = \frac{\eta^\tau(\omega_1 - k)^+}{(u + \varepsilon - m(8\rho))^{p-1}}$$

取代(13)、(16)中的试验函数，同样方法可以证明w_1在$B(5\rho) \setminus B(3\rho)$上有和$\varepsilon$、$\rho$无关的上界．据此再一次推导出(28)．

利用(28)进行迭代，即可得到(11)，详细推导可见[3]．定理1证讫．

参 考 文 献

[1] Gilbarg, D., Trudinger, N. S., 二阶椭圆型偏微分方程, 上海科学技术出版社, 1981.

[2] 梁鋆廷, 中山大学学报(自然科学版), No.3, 1988, 107—112.

[3] 梁鋆廷, 成都大学学报(自然科学版), No.1, 1986, 1—7.

[4] 梁鋆廷, 曲阜师范大学学报(自然科学版), V.13, No.3, 1987, 161—169.

[5] 梁鋆廷, 延边大学学报(自然科学版), No.2, 1987, 9—16.

[6] Ладыженская, О.А., Уральцева, Н.Н., 线性和拟线性椭圆型方程, 科学出版社, 北京, 1987.

[7] Granlumd, S., Manuscripta Math., V.36, 1981, 355—365.

A Liouville Theorem for Generaliztd Solutions of Elliptic Equations

Liang Xiting

(Zhongshan University)

Abstract

It is considered the following elliptic equation:

$$\operatorname{div}\vec{A}(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u) \quad \text{in } E^n$$

where $\vec{A}$ and B satisfy the structural conditions $\nabla u\cdot\vec{A}(x, u, \nabla u) \geqslant |\nabla u|^p$, $p>1$, $|\vec{A}(x, u, \nabla u)| \leqslant \kappa|\nabla u|^{p-1}$, $\kappa\geqslant 1$, $|B(x, u, \nabla u)| \leqslant b(x)|\nabla u|^{p-1}$, $b(x)\in L_\infty(E^n)$ and $b(x)=O(\frac{1}{|x|})$ as $|x|\to\infty$. The Liouville theorem is proved for generalized solutions of the equation.