第10卷 第2期
1990年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.2
May, 1990

一个集值映射的不动点定理

吴 全 华

(河北廊坊师范专科学校)

摘 要

M. Lassonde在[3]中用逼近论和同伦方法证明了几个非凸集上的集值映射的不动点定理. 本文推广了[3]中的定理3.15, 得到一个较好的不动点定理及若干有用的推论.

设X是局部凸空间E的凸子集, 记$I_x(x)=\{z\in E \mid z=x+t(u-x),\ u\in X,\ t\geqslant 0\}$.

引理1[1] 设X是Hausdorff局部凸空间E的闭凸子集, $F:X\to 2^E$是上半连续的紧映射, 具有非空闭凸值, 如果存在$W\in Int(x)$使F满足

(1) $\forall y\in\delta(x)$和$\forall z\in F(y)$及一切$m>1$恒有

$$z-w\neq m(y-w)$$

则F必有不动点.

引理2 设X是线性拓扑空间E的闭凸子集, 集值映射$F:X\to 2^E$, 对任何$x\in\delta(X)$满足条件

(2) $$F(x)\subset \mathrm{cl}(I_X(x)),$$

则对任意给定的$w\in \mathrm{Int}(X)$, F满足条件(1).

证明 设$w\in \mathrm{Int}(X)$, 使F不满足条件(1), 即存在$y\in\delta(X)$, $z\in F(y)$和$m>1$,使得$z-w=m(y-w)$. 命网$\{z_a=y+t_a(u_a-y) \mid a\in\Gamma,\ u_a\in X, t_a\geqslant 0\}$收敛于点$z=m(y-w)+w$. 设$p$是闭凸集$X-w$的Minkowsi泛函, 于是

$$p(z-z_a)=p(m(y-w)+w-[y+t_a(u_a-y)])=p((m-1+t_a)(y-w)-t_a(u_a-w))$$
$$\geqslant(m-1+t_a)p(y-w)-t_a p(u_a-w)\geqq m-1>0.$$

与$p(z-z_a)\to 0$矛盾. 引理得证.

引理3 设X是Hausdorff局部凸空间E的闭凸子集, 且$\mathrm{Int}(X)\neq\varnothing$, $F:X\to 2^E$是上半半连续的紧映射, 具有非空闭凸值, 如果$\forall x\in\delta(X)$, F满足条件(2), 则F必有不动点.

证明 由引理1及引理2即得.

定理 (1) 设E是Hausdorff局部凸空间, X是E的闭凸子集, U是X的非空开子集.

(2) $G:X\to 2^E$是上半连续闭凸值紧映射, $\forall x\in X$, 都有$G(x)\subset \mathrm{cl}(I_X(x))$且$F_{ix}(G)\subset U$.

* 1987年9月18日收到.

（3）$F:\overline{U}\to 2^E$是上半连续闭凸值紧映射，$\forall x\in\overline{U}$ 都有 $F(x)\subset \mathrm{cl}(I_X(x))$．$\forall (x,t)\in \overline{U}\times[0,1]$，令 $H(x,t)=tF(x)+(1-t)G(x)$，则下列两条至少有一条成立．

（a）存在$x\in\delta(U)$和$0<t<1$，使得$x\in H(x,t)$；

（b）存在$x_0\in\overline{U}$，使得$x_0\in F(x_0)$．

证明 假设(a)不成立，我们来证(b)成立．如果F在$\delta(U)$上有不动点，则(b)成立．假设F在$\delta(U)$上没有不动点，命

$$B=\{x\in\overline{U}|x\in H(x,t),\ t\in[0,1]\}$$

则由已知条件（2）及对F的假定易知$B\cap\delta(U)=\varnothing$，又由$F$和$G$的上半连续性易证$B$是闭集．因$E$是Hausdorff局部凸空间，所以是拟度量空间(gauge space)，从而是完全正则空间，于是存在连续函数$\lambda:X\to[0,1]$，当$x\in B$时，$\lambda(x)=1$，当$x\in\delta(U)$时，$\lambda(x)=0$．对$\forall x\in X$，定义

$$\widetilde{H}(x)=\begin{cases}H(x,\lambda(x)) & \text{当 } x\in\overline{U} \text{ 时}\\ G(x) & \text{当 } x\in X-\overline{U} \text{ 时,}\end{cases}$$

则$\widetilde{H}:X\to 2^E$是上半连续闭凸值紧映射，且$\forall x\in X$，都有$\widetilde{H}(x)\subset\mathrm{cl}(I_X(x))$．据引理3，存在$x_0\in X$，使$x_0\in\widetilde{H}(x_0)$．我们断言$x_0\notin X-\overline{U}$．因为如果$x_0\in X-\overline{U}$，则$\widetilde{H}(x_0)=G(x_0)$，于是$x_0\in U$，显然矛盾．因此$x_0\in\overline{U}$，这样便有$x_0\in H(x_0,\lambda(x_0))$，从而$x_0\in B$，$\lambda(x_0)=1$，所以$x_0\in F(x_0)$，可见(b)成立．

推论1 设E是Hausdorff局部凸空间，X是E的紧致凸子集，U是X的非空开子集．$G:X\to 2^E$是上半连续映射，具有非空紧致凸值，$\forall x\in X$，都有$G(x)\subset\mathrm{cl}(I_X(x))$且$F_{ix}(G)\subset U$，$F:\overline{U}\to 2^E$是上半连续映射，具有非空紧致凸值且$\forall x\in\overline{U}$都有$F(x)\subset\mathrm{cl}(I_X(x))$，则下列两条至少有一条成立．

（a）存在$x\in\delta(U)$和$0<t<1$，使$x\in tF(x)+(1-t)G(x)$．

（b）存在$x_0\in\overline{U}$，使$x_0\in F(x_0)$．

注：推论1即是[3]中定理3.15，所以上面定理确是[3]定理3.15的推广．不仅如此，我们由前面定理还可以推得一些新的不动点定理．下面例举一二、首先定理中$G(x)\equiv\{0\}$时，有

推论2 设E是Hausdorff局部凸空间，X是E的闭凸子集，U是X的非空开子集，$F:\overline{U}\to 2^E$是上半连续闭凸值紧映射，且$\forall x\in\overline{U}$总有$F(x)\subset\mathrm{cl}(I_X(x))$．则下列两条至少有一条成立．

（a）存在$x\in\delta(U)$和$0<\lambda<1$，使$x\in\lambda F(x)$．

（b）存在$x_0\in\overline{U}$，使$x_0\in F(x_0)$．

推论3 设E是Hausdorff局部凸空间，U是E的非空开子集，$F:\overline{U}\to 2^{\overline{U}}$是上半连续闭凸值紧映射，则或者存在$x_0\in\overline{U}$，使$x_0\in F(x_0)$；或者存在$x\in\delta(U)$和$0<t<1$，使得$x\in tF(x)$．

推论4 设E是Hausdorff局部凸空间，$X\subset E$是闭凸子集，U是X的非空开子集且对$0<t<1$满足条件$t\overline{U}\subset U$．$F:\overline{U}\to 2^E$是上半连续闭凸值紧映射，$\forall x\in\overline{U}$，总有$F(x)\subset\mathrm{cl}(I_X(x))$且$F(\delta(U))\subset\overline{U}$，则$F$有不动点．

证明 易知满足推论2的全部条件，但结论(b)不成立．事实上，如果$x\in\delta(U)$，则$F(x)\subset\overline{U}$，因此，任意$z\in F(x)$和$t\in(0,1)$总有$tz\in U$，所以$x\neq tz$，即$\forall x\in\delta(U)$，都有$x\notin tF(x)$，$(0<t<1)$．

转218页

Banach乘积空间中映射的不动点存在唯一性与迭代过程的收敛性

游兆永　李磊

（西安交通大学应用数学系）

摘　　要

本文将作者在[4]中得到的从R^n到R^n的线性映射下Jacobi迭代和Seidel迭代收敛准则推广到论证n个Banach空间的乘积空间映射到自良的非线性向量算子的不动点存在唯一性，推广了[2]的主要结论．本文所有结论均包含Banach压缩映射原理作为最简单的特例．

接220页

参考文献

[1] S. Reich, A remark on set-valued mapping that Satisfy the Leery-Schauder condition, Atti. Accad. Naz. Lincei .61(1976)193—194.

[2] S. Reich, A remark on set-valued mapping that satisfy the Leary-Schauder Condition, Atti. Accad. Naz. Lincei. 66(1979) 1—2.

[3] M. Lassonde, On the use of KKM multifunction in fixed point theory and related topics, J. Math. Anal. Appl. 97(1983) 151—201.