第10卷 第2期 数学研究与评论 Vol. 10 No.2
1990年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 1990

概率赋范空间上的线性算子

龚 怀 云

（西安交通大学数学系）

摘 要

本文提出了概率赋范空间上各类线性算子的概念，并仔细研究了它们之间的关系．

定义1 设E是线性空间．Δ^+是非减、左连续、$f(0)=0$且上确界为1的分布函数所成集合．$\mathscr{F}:E\to\Delta^+$，记$\mathscr{F}(p)=f_p$，$f_p(x)$为f_p在x的值．如果满足：

1） $f_p(x)=H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$ 当且仅当$p=\theta$；

2） $f_{\lambda p}(x)=f_p(\frac{x}{|\lambda|})$，对$0\neq\lambda\in R$；

3） 存在t-模T，对$\forall\ p,q\in E$，x，$y>0$，有

$$f_{p+q}(x+y)\geqslant T(f_p(x),f_q(y))$$

则称$(E,\mathscr{F},T)$为Menger概率赋范线性空间（简称$M-PN$空间），f_p称为p的概率范数．

这里映象$T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$，它对每一元非减，可交换、可结合，且$T(a,1)=a$ $(a\in[0,1])$．

定义2 设$(E,\mathscr{F},T)$是$M-PN$空间，A是E中非空子集，令

$$D_A(x)=\sup_{t<x}[\inf_{p\in A}f_p(t)]$$

称为A的概率直径，如

$\sup\limits_{x\in R}D_A(x)=1$ 则称A为概率有界集；

$0<\sup\limits_{x\in R}D_A(x)<1$ 则称A为概率半有界集；

$D_A(x)\equiv 0$ 则称A为概率无界集．

为使问题简洁，以下我们均假定t-模T连续．如定义$F_{pq}=f_{p-q}$，则$M-PN$空间显然是概率度量空间．容易验证，如$p_n\to p,q_n\to q$，$\lambda_n\to\lambda$，则$p_n\pm q_n\to p\pm q$，$\lambda p_n\to\lambda p$，$\lambda_n p\to\lambda p$．

定义3 设$(E,\mathscr{F},T)$和$(E_1,\mathscr{F}_1,T_1)$都是$M—PN$空间，$S:E\to E_1$是线性算子．

1） 如存在$M>0$，对$\forall\ p\in E$，$x>0$，有

* 1988年3月16日收到．

$$f_{Sp}(x) \geqslant f_p(Mx)$$

则 S 称为强有界算子；

2） 如存在 $M>0$，对 $\forall\ p\in E$， $x>0, y>0$，有

$$f_{Sp}(x+y) \geqslant T(f_{\frac{p}{2}}(Mx),\ f_{\frac{p}{2}}(My))$$

则 S 称为次强有界算子；

3） 如 $A\subset E$ 是概率有界集，就有 $S(A)\subset E_1$ 是概率有界集．则 S 称为有界线性算子．

已经证明：S 是有界线性算子的充要条件是 S 为连续线性算子．

定理 1 $S: E\to E_1$ 是线性算子，则

1） S 是强有界线性算子必是次强有界算子

2） S 是次强有界算子必是有界（连续）算子．

证明 1） 由

$$f_{Sp}(x+y) \geqslant f_p(M(x+y)) \geqslant T(f_{\frac{p}{2}}(Mx),\ f_{\frac{p}{2}}(My))$$

立即得到．

2） 如 $p_n\to p$，则

$$f_{Sp_n-Sp}(x) = f_{S(p_n-p)}(x) \geqslant T(f_{\frac{p_n-p}{2}}(Mx),\ f_{\frac{p_n-p}{2}}(Mx))$$

即可推得

$$Sp_n\to Sp$$

但是反之不一定成立，反例见[3]．

引理 1 如 t-模 T 连续，则

$$\underline{\lim}\, T(x_n, y_n) \geqslant T(\underline{\lim}\, x_n, \underline{\lim}\, y_n)$$

证明 如

$$\underline{\lim}\, T(x_n, y_n) < T(\underline{\lim}\, x_n, \underline{\lim}\, y_n) = a$$

取 ε 充分小，使

$$\underline{\lim}\, T(x_n, y_n) < a-2\varepsilon$$

存在 $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}\subset\{(x_n, y_n)\}$，使

$$T(x_{n_k}, y_{n_k}) < a-2\varepsilon$$

且

$$x_{n_k}\to x_0,\quad y_{n_k}\to y_0$$

于是由 T 连续，可得

$$T(x_0, y_0) \leqslant a-2\varepsilon < a-\varepsilon$$

进一步可推得

$$T(\underline{\lim}\, x_n, \underline{\lim}\, y_n) < a-\varepsilon$$

得到矛盾．

定理 2 S 是强有界算子的充要条件是存在 $M>0$，使得对 $\forall\ p_1+p_2=p$， $x>0, y>0$ 有

$$f_{Sp}(x+y) \geqslant T(f_{p_1}(Mx),\ f_{p_2}(My)).$$

证明 必要条件，显然．

充分条件：对 $\forall\ p\in E, n$， $x>0, y>0$，有

$$f_{Sp}(x+y) \geqslant T(f_{\frac{1}{n}p}(Mx),\ f_{\frac{n-1}{n}p}(My))$$

从而据引理 1 及[5]有

$$f_{Sp}(x+y)\geqslant\underline{\lim}\,T(f_{\frac{1}{n}p}(Mx),\ f_{\frac{n-1}{n}p}(My))$$
$$\geqslant T(\underline{\lim}\ f_{\frac{1}{n}p}(Mx),\ \underline{\lim}\,f_{\frac{n-1}{n}p}(My))$$
$$\geqslant T(f_\theta(Mx),f_p(My))=f_p(My)$$

从而

$$\lim_{x\to0^+} f_{Sp}(x+y)\geqslant f_p(My).$$

即

$$f_{Sp}(y)\geqslant f_p(My)\quad(\text{a.e})$$

但 f 左连续，故

$$f_{Sp}(y)\geqslant f_p(My).$$

定义 4 $N_\theta(\varepsilon,\lambda)=\{p\,|\,p\in E\quad J_p(\varepsilon)>1-\lambda\}$ 称为 θ 的 ε,λ 邻域.

引理 2 $A\subset E$ 是概率有界集，则存在 $a>0$，使

$$aA=\{ap\,|\,p\in A\}\subset N_\theta(\varepsilon,\lambda)$$

证明 由于 $\sup\limits_{x\in R}D_A(x)=1$ 存在 $x_1>0$ 使

$$D_A(x_1)>1-\lambda$$

从而存在 $0<x_2<x_1$ 使

$$\inf_{p\in A}f_p(x_2)>1-\lambda$$

即 $\forall p\in A$ 有 $f_p(x_2)>1-\lambda$，令 $a=\dfrac{\varepsilon}{x_2}$，则对 $ap\in aA$ 有

$$f_{ap}(\varepsilon)=f_p(x_2)>1-\lambda$$

即 $ap\in N_\theta(\varepsilon,\lambda)$，也就是

$$aA\subset N_\theta(\varepsilon,\lambda)$$

定理 3 $S:E\to E_1$ 是线性算子，如存在 E 中的 $N_\theta(\varepsilon,\lambda)$ 使 $S(N_\theta)$ 是概率有界集，则 S 是有界线性算子.

证明 由引理2，$\forall$ 概率有界集 A，存在 $a>0$，使

$$aA\subset N_\theta(\varepsilon,\lambda)$$

从而

$$aS(A)=S(aA)\subset S(N_\theta)$$

故 $S(A)$ 是概率有界集，于是 S 是有界线性算子.

定理 4 E 存在 $N_\theta(\varepsilon_0,\lambda_0)$ 是概率有界集，$S:E\to E_1$ 是线性算子. 则 S 是有界线性算子的充要条件是 $S(N_\theta(\varepsilon_0,\lambda_0))$ 是概率有界集.

证明 由定义 3 及定理 3 立即可得.

定理 5 E 存在 $N_\theta(\varepsilon_0,\lambda_0)$ 是概率有界集，$S:E\to E_1$ 是线性算子. 则 S 是有界线性算子的充要条件是：存在 $D(x)\in\Delta^+$，使得对 $\forall$ 概率有界集 $A\subset E$，存在 $a_A>0$，使得

$$D_{S(A)}(x)\geqslant D(a_Ax)\qquad(\forall\ x>0)$$

证明 充分条件：

$$\sup_{x\in R}D_{S(A)}(x)\geqslant\sup_{x\in R}D(a_Ax)=1$$

故 $S(A)$ 是概率有界集，从而 S 是有界线性算子.

必要条件：由定理4，$S(N_\theta)$是概率有界集，$D_{S(N_\theta)}(x)\in\Delta^+$，$\forall$ 概率有界集 $A\subset E$，存在$a_A>0$，使

$$a_A A\subset N_\theta$$

$$D_{a_A S(A)}(x)\geqslant D_{S(N_\theta)}(x)\quad (x>0).$$

但是

$$D_{a_A S(A)}(x)=D_{S(A)}(\frac{1}{a_A}x)$$

即

$$D_{S(A)}(x)\geqslant D_{S(N_\theta)}(a_A x)\quad (x>0)$$

参考文献

[1] B. Schweizer and A. Sklar: Probabilistic Metric Spaces, North-Holland Series in Probability and applied mathematics, (1983).

[2] R. J. Egbert: Products and Quotients of Probabilistic Mertic Spaces, Pacific J. Math, 24(1968).

[3] P. J. Prochaska: On Random Normed Spaces A Dissertation Submitted to the Faculty of Clemson University (1967).

[4] 龚怀云，张敏先，刘作述，概率度量空间的有界性，可分性与紧性，工程数学学报第1卷第2期(1985).

[5] 龚怀云，概率度量空间中B. Schweizer定理的注记，西安交通大学学报19卷2期(1985).

Linear Operators On Probabilistic Normed Spaces

Gong Huaiyun

(Xian Jiaotong University)

Abstract

This paper brings forward several types of concepts of linear operators on probabilistic normed spaces and studies the relations between them.