第10卷 第2期
1990年5月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.2
May. 1990

关于《A Generalization of Bellman—Gronwall Integral Inequality》一文的错误*

肖 淑 贤

（华中理工大学数学系，武汉）

《数学研究与评论》1985年第2期发表了Zhang Binggen和Shen Yuyi两人合写的论文《A Generalization of Bellman—Gronwall Integral Ineguality》（以下简称文[1]）．必须指出，文[1]的基本结果之一定理2，其结论和证明的思想方法均是错误的．

为讲清楚这点，先将文[1]的定理2叙述如下：

定理2 If

$$Q(x)<f(x)+\sum_{i=1}^{n}g_i(x)\int_{x_0}^{x}h_i(s)Q_i(s)\mathrm{d}s \qquad x_0<x<x_1$$

where $g_i>0, h_i\geqslant 0$ and Q_i are integrable, $i=1,2,\cdots,n$. E^if/g is absolutely conti nuons, $i=1,2,\cdots,n$, then

$$Q(x)<E^nf$$

where E^k is defined as following

$$E^0f=f$$

$$E^kf=g_k(x)\Big[\frac{f(x_0)}{g_k(x_0)}\exp\Big(\int_{x_0}^{x}g_k(s)h_k(s)\mathrm{d}s\Big)+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\exp\Big(\int_{s}^{x}g_k(t)h_k(t)\mathrm{d}t\Big)\Big(\frac{E^{k-1}f(s)}{g_k(s)}\Big)'\mathrm{d}s$$

$$x_0<x<x_1,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

今考虑不等式

$$Q\leqslant x+\int_0^xQ\mathrm{d}s+\int_0^xQ\mathrm{d}s \qquad 0<x<1.$$

相应于定理2的符号有

$$f=x,\quad g_1(x)=g_2(x)=h_1(x)=h_2(x)=1.$$

$$E^0f=f$$

$$E'f=g_1(x)\Big[\frac{f(0)}{g_1(0)}e^{\int_0^x g_1(s)h_1(s)\mathrm{d}s}+\int_0^x e^{\int_s^x g_1(t)h_1(t)\mathrm{d}t}\Big(\frac{f(s)}{g_1(s)}\Big)'\mathrm{d}s\Big]$$

* 1987年8月14日收到．

$$E^2 f = g_2(x)\left[\frac{f(0)}{g_2(0)} e^{\int_0^x g_2(s)h_2(s)\mathrm{d}s} + \int_0^x e^{\int_s^x g_2(t)h_2(t)\mathrm{d}t}\right.$$

$$\left.\cdot\left\{\frac{g_1(s)}{g_2(s)}\left[\frac{f(0)}{g_1(0)} e^{\int_0^s g_1(t)h_1(t)\mathrm{d}t} + \int_0^s e^{\int_t^s g_1(\tau)h_1(\tau)\mathrm{d}\tau}\left(\frac{f(t)}{g_1(t)}\right)'\mathrm{d}t\right]\right\}'\mathrm{d}s\right].$$

于是可算得

$$E^0 f = x;$$

$$E^1 f = \int_0^x e^{\int_s^x \mathrm{d}t} = e^x - 1;$$

$$E^2 f = \int_0^x e^{\int_s^x \mathrm{d}t}\left[\int_0^s e^{\int_t^s \mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t\right]'\mathrm{d}s = xe^x.$$

按照文[1]的定理2, 应有 $Q < xe^x$ ($0 < x < 1$). 即 xe^x 是 $\{Q\}$ 在 $[0,1]$ 上之一上界. 但是, $\frac{1}{2}(e^{2x}-1)$ 满足积分方程

$$Q = x + 2\int_0^x Q\mathrm{d}s$$

然而

$$\frac{1}{2}(e^{2x}-1) > xe^x \quad (0 < x < 1).$$

细读文[1]的证明, 可以发现, 作者在用数学归纳法证明递推公式时, 错用了假设条件. 文[1]的定理5有类似的毛病.

参 考 文 献

[1] Zhang Binggen Shen Yuyi., 数学研究与评论, No.2(1985), 83—88.