第10卷 第2期
1990年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 10 No.2
May. 1990

关于《强大数定律成立的充要条件》一文的补正

冯慈璜

（杭州大学数学系）

文[1]告诉我们如下的

定理 设$\{\xi_k, k\geqslant 1\}$是任意随机变量序列，则强大数定律对之成立，即

$$P\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(\xi_k-E\xi_k)=0\}=1 \tag{1}$$

的充分必要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\{\frac{(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k))^2}{n^2+(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k))^2}\}<\infty \tag{2}$$

由于（2）式对$\{\xi_k\}$不附加独立性或同分布等限制，显得十分诱人．尽管（2）的充分性无疑正确成立，但（2）不是（1）式的必要条件，其理由如下．

先看一个反例：

设$\{\xi_k, k\geqslant 1\}$为独立同分布随机变量序列，且

$$p(\xi_1=0)=\frac{1}{2}\ , \quad p(\xi_1=1)=\frac{1}{2}. \tag{3}$$

据柯尔莫格洛夫强大数定律，知$\{\xi_k\}$满足（1）．

另一方面，由于

$$E\{\frac{(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k))^2}{n^2+(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k))^2}\}\geqslant E\{\frac{(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k))^2}{n^2+(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-E\xi_k|)^2}\}=\frac{\frac{1}{8}n}{n^2+\frac{1}{4}n^2}=O(\frac{1}{n})$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\{\frac{(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k))^2}{n^2+(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k))^2}\}=\infty \tag{4}$$

即（2）式不成立．

* 1988年7月25日收到．

更一般地，存在独立、对称的$\{\xi_k\}$，服从强大数定律，但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{n^2}=\infty$的例子，此时(2)也可以不成立．

那么［1］中的论证在什么地方有毛病呢？我们发现［1］认为

$$\lim_{n\to\infty} p(n)P\{\bigcup_{j=h}^{\infty}|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}(\xi_k-E\xi_k)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2^{j/2}}\}>0 \quad (5)$$

与

$$\lim_{n\to\infty}P\{\bigcup_{n=n}^{\infty}|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}(\xi_k-E\xi_k)|>\frac{\varepsilon}{2^{j/2}}\}=0 \quad (6)$$

总是相互矛盾的．这正是导致错误的根源．事实上，易知$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}>0$

与
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

并不矛盾，两者都能成立．

最近，［2］已经给出强大数定律成立的充要条件，援用这一结果及格涅坚科定理，我们有如下的命题：

命题 若$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$为任何随机变量序列，$\{\xi_k\}$服从强大数定律的充要条件是：

(i)
$$\lim_{n\to\infty}E\{\frac{(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k))^2}{n^2+(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k))^2}\}=0$$

(ii)
$$\frac{\xi_n}{n}\xrightarrow{\text{a.s.}}0\quad(n\to\infty)$$

(iii) 对任何$\varepsilon>0$，存在$0<\delta<\varepsilon$ 使得

$$P\{\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}(\varepsilon-\delta\leqslant\frac{|\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-F\xi_k)|}{n}<\varepsilon)\}=0.$$

参 考 文 献

［1］傅顺良，《数学研究与评论》，6卷3期(1986)88．

［2］杜午初，《苏州大学学报》，2卷2期(1986)，112—117．

［3］概率论，复旦大学编(第一册)．

A Correction On《The Sufficient and Necessary Condition of SLLN》

Feng Cihuang

Abstract

In this note we point out a mistake of the article〈The sufficient and necessary condition of SLLN〉.