第11卷 第1期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.11 No.1
1991年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1991

一个数论函数的倒数和*

宣体佐
（北京师范大学数学系）

§1 引言和主要结果

设 $p(n)$ 表示大于1的整数 n 的最大素因数，$p(1)=1$. 1981年，Ivic在[1]中证明了

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{p(n)}=x\exp\{-(2\log x\log_2 x)^{\frac{1}{2}}+O((\log x\log_3 x)^{\frac{1}{2}})\},\tag{1.1}$$

其中 $\log_2 x=\log\log x$，$\log_3 x=\log\log\log x$. 在[2]中我们进一步证明了

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{p^r(n)}=x\exp\{-(2r\log x\log_2 x)^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}\frac{\log_3 x}{\log_2 x}+O(\frac{1}{\log_2 x}))\},\tag{1.2}$$

其中 $r>0$ 是任意固定实数. 在此同时，[3]中给出了比(1.1)和(1.2)更精密的结果.

1986年，Erdös, Ivić 和 Pomerance[4]给出了这个倒数和的渐近式：

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{p(n)}=x\delta(x)(1+O((\frac{\log_2 x}{\log x})^{\frac{1}{2}})),\tag{1.3}$$

其中

$$\delta(x)=\int_2^x\rho(\frac{\log x}{\log t})\frac{\mathrm{d}t}{t^2},$$

这里 $\rho(u)$ 是方程

$$u\rho'(u)=-\rho(u-1),\quad u>1\tag{1.5}$$

具有初始条件 $\rho(u)=1$ ($0\le u\le 1$) 的连续解. $\rho(u)$ 通常称为Dickman函数. 华罗庚教授[5]曾给出函数 $\rho(u)$ 的对数的渐近式：

$$\rho(u)=\exp\{-u(\log u+\log_2 u-1+\frac{\log_2 u}{\log u}+O(\frac{1}{\log u}))\}.\tag{1.6}$$

把含有 $p(n)$ 的倒数的某些和同 $p(n)$ 本身的倒数和加以比较是有趣的. 例如(参看[4]，[6]，[7])：

$$\sum_{n\le x}\frac{\omega(n)}{p(n)}\sim(\frac{2\log x}{\log_2 x})^{\frac{1}{2}}\sum_{n\le x}\frac{1}{p(n)},$$

$$\sum_{n\le x}\frac{\Omega(n)-\omega(n)}{p(n)}\sim(\sum_p\frac{1}{p^2-p})\sum_{n\le x}\frac{1}{p(n)},$$

$$\sum_{n\le x}\frac{\mu^2(n)}{p(n)}\sim\frac{6}{\pi^2}\sum_{n\le x}\frac{1}{p(n)},$$

* 1989年1月19日收到.

$$\sum_{n\le x}\frac{\sigma(n)}{p(n)}\sim\frac{\pi^2}{6}x\sum_{n\le x}\frac{1}{p(n)},$$

$$\sum_{n\le x}\frac{\varphi(n)}{p(n)}\sim\frac{3}{\pi^2}x\sum_{n\le x}\frac{1}{p(n)}.$$

其中$\omega(n),\Omega(n),\mu(n),\sigma(n),\varphi(n)$都是通常意义下的数论函数.

设$Q(n)$表示整除大于1的整数n的最大素数幂，$Q(1)=1$. 为了比较$Q(n)$的倒数和与$p(n)$的倒数和，Erdös 等在[4]中曾证明了，存在常数$c>0$，使得

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{Q(n)}=(1+O(\exp\{-c(\log x\log_2 x)^{\frac{1}{2}}\}))\sum_{n\le x}\frac{1}{p(n)}.$$

本文将进一步证明下面的

定理
$$\sum_{n\le x}\left(\frac{1}{p(n)}-\frac{1}{Q(n)}\right)=2\sum_{n\le x}\frac{1}{p^{3/2}(n)}\left(1+O\left(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}\right)\right),\tag{1.7}$$

其中

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{p^r(n)}=rx\delta_r(x)\left(1+O\left(\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right),\quad r>0,\tag{1.8}$$

和

$$\delta_r(x)=\int_2^x\rho\left(\frac{\log x}{\log t}\right)\frac{dt}{t^{r+1}}.\tag{1.9}$$

对于这个定理的证明，我们使用了与[4]不同的技巧.

§2 一些引理

引理1 设$r>0$是任意固定实数，令

$$L_1(r)=\exp\left\{\left(\frac{1}{2r}\log x\log_2 x\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-2\frac{\log_3 x}{\log_2 x}\right)\right\},$$

$$L_2(r)=\exp\left\{\left(\frac{1}{2r}\log x\log_2 x\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+2\frac{\log_3 x}{\log_2 x}\right)\right\},$$

则有

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{p^r(n)}=\sum_{L_1(r)<p\le L_2(r)}\frac{1}{p^r}\Psi\left(\frac{x}{p},p\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\log^A x}\right)\right),$$

其中$A>0$是任意固定实数，$\Psi(x,y)$表示不超过x且没有素因数大于y的正整数的个数.

证明 当$r=1$时，这就是[6]中的(4.3)式，当$r\ne1$时，可类似地加以证明.

引理2[8] 对任一固定正数ε，和$x\ge3$，$\exp\{(\log_2 x)^{\frac{5}{3}+\varepsilon}\}\le y\le x$，一致地有

$$\Psi(x,y)=x\rho(u)\left(1+O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right),\quad u=\frac{\log x}{\log y}.$$

引理3[7] 设$b\ge1$和$\varepsilon>0$是任意二个固定实数，则对$1\le d\le y^b$，$\exp\{(\log_2 x)^{\frac{5}{3}+\varepsilon}\le y\le x^{1/(b+1)}$，一致地有

$$\Psi\left(\frac{x}{d},y\right)=\Psi(x,y)d^{-\beta}\left(1+O\left(\frac{1}{u}\right)+O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right),$$

其中$\beta=\beta(x,y)=1-\dfrac{\xi(\log x/\log y)}{\log y}$，这里$\xi(u)$是方程

$$e^{\xi}=u\xi+1,\tag{2.1}$$

的正数解，并且$\xi(u)$满足

$$\xi(u)=\log u+O(\log_2(u+2)),\quad u\to\infty. \tag{2.2}$$

引理 4[7] 对$1\le d\le x$，$\exp\{(\log_2 x)^{\frac{5}{3}+\varepsilon}\}\le y\le x$，其中$\varepsilon$是任一固定正数，一致地有

$$\Psi(\frac{x}{d},y)\ll\Psi(x,y)d^{-\beta}.$$

§3 定 理 的 证 明

我们先证（1.7）式．分别考察$Q(n)=p(n)$，$p(n)<Q(n)<p^2(n)$,和$Q(n)\ge p^2(n)$这三种情形，可得

$$G(x):=\sum_{n\le x}(\frac{1}{p(n)}-\frac{1}{Q(n)})=\sum_{n\le x,\,Q(n)>p(n)}\frac{1}{p(n)}$$

$$-\sum_{n\le x,\,p(n)<Q(n)<p^2(n)}\frac{1}{Q(n)}+O(\sum_{n\le x}\frac{1}{p^2(n)}). \tag{3.1}$$

下面先对（3.1）式右端进行一些简化．首先从（1.2）式容易看出，（3.1）式右端第三个和$\ll R$，其中$R=\frac{\log_3 x}{\log_2 x}\sum_{n\le x}\frac{1}{p^{3/2}(n)}$．然后对（3.1）式右端第一、二个和应用引理1，并记$L_1=L_1(\frac{3}{2})$，$L_2=L_2(\frac{3}{2})$，可得

$$G(x)=\sum\nolimits_1\frac{1}{p(n)}-\sum\nolimits_2\frac{1}{Q(n)}+O(R)=G_1-G_2+O(R), \tag{3.2}$$

其中Σ_1的求和范围是$n\le x,Q(n)>p(n)$，$L_1<p(n)\le L_2$，Σ_2的求和范围是$n\le x$，$p(n)<Q(n)<p^2(n)$，$L_1<p(n)\le L_2$．下面我们估计G_1．因为$Q(n)>p(n)$所以必存在素数$q<p(n)$，及整数$k\ge2$，使得$q^k\|n$，$q^k>p(n)$．我们按照$q^k\|n$，把n进行分类求和,但要注意对同一个整数n，若除了$q^k\|n$之外，还有素数$q_1\ne q$，和整数$r\ge2$，使得$q_1^r\|n$，$q_1<p(n)$，$q_1^r>p(n)$，这样对n分类时可能出现重叠的情形，因而会产生误差．由此我们得到

$$\begin{aligned}G_1=&\sum_{L_1<p\le L_2}\frac{1}{p}\sum_{p^{1/k}<q<p,\,k\ge2}\{\Psi(\frac{x}{pq^k},p)-\Psi(\frac{x}{pq^{k+1}},p)\}\\&+O(\sum_{L_1<p\le L_2}\frac{1}{p}\sum_{p^{1/k}<q<p,\,k\ge2}\sum_{p^{1/r}<q_1<p,\,r\ge2}\Psi(\frac{x}{pq^kq_1^r},p))\\=&\sum_{L_1<p\le L_2}\frac{1}{p}\sum_{p^{1/2}<q<p}\Psi(\frac{x}{pq^2},p)+O(\sum_{L_1<p\le L_2}\frac{1}{p}\sum_{p^{1/k}<q<p,\,k\ge3}\Psi(\frac{x}{pq^k},p))\\&+O(\sum_{L_1<p\le L_2}\frac{1}{p}\sum_{p^{1/k}<q<p,\,k\ge2}\sum_{p^{1/r}<q_1<p,\,r\ge2}\Psi(\frac{x}{pq^kq_1^r},p))\\=&G_{11}+O(G_{12})+O(G_{13}).\end{aligned} \tag{3.3}$$

利用引理 3 我们得到

$$G_{11}=\sum_{L_1<p\le L_2}\frac{1}{p}\Psi(\frac{x}{p},p)\sum_{p^{1/2}<q<p}\frac{1}{q^{2-2\delta}}(1+O(\frac{\log_3 x}{\log_2 x})),$$

其中 $\delta=\frac{1}{\log p}\xi(\frac{\log(x/p)}{\log p})$．可以算出

$$\sum_{p^{1/2}<q<p}\frac{1}{q^{2-2\delta}}=\int_{p^{1/2}}^{p-\varepsilon}\frac{1}{z^{2-2\delta}}d\pi(z)=\int_{p^{1/2}}^{p}\frac{dz}{z^{2-2\delta}\log z}\ (1+O(\frac{1}{\log p}))$$

$$=\frac{2p^{\delta}}{p^{1/2}\log p}(1+O(\frac{\log_3 x}{\log_2 x})).$$

利用（2.1）和（2.2）式可得

$$p^{\delta}=\frac{1}{2}(3\log x\log_2 x)^{\frac{1}{2}}(1+O(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}))\ .$$

于是再利用引理 1 可得

$$G_{11}=3\sum_{L_1<p\leq L_2}\frac{1}{p^{3/2}}\Psi(\frac{x}{p},\ p)(1+O(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}))$$

$$=3\sum_{n\leq x}\frac{1}{p^{3/2}(n)}(1+O(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}))\ . \tag{3.4}$$

对G_2的估计方法是类似的，但要用引理 4 代替引理3，我们有

$$G_{12}\ll\sum_{L_1<p\leq L_2}\frac{1}{p}\Psi(\frac{x}{p},\ p)\sum_{p^{1/k}<q<p,\ k\geq 3}\frac{1}{q^{k(1-\delta)}}$$

$$\ll\sum_{L_1<p\leq L_2}\frac{1}{p}\Psi(\frac{x}{p},\ p)\sum_{p^{1/3}<q<p}\frac{1}{q^{3(1-\delta)}}$$

$$\ll\sum_{L_1<p\leq L_2}\frac{1}{p^{5/3}}\Psi(\frac{x}{p},\ p)\ll R. \tag{3.5}$$

用类似方法可得$G_{13}\ll R$，于是由（3.3）—（3.5）我们得到

$$G_1=3\sum_{n\leq x}\frac{1}{p^{3/2}(n)}(1+O(\frac{\log_3 x}{\log_2 x})). \tag{3.6}$$

下面我们来估计G_2. 由引理 1 我们有

$$G_2=\sum\nolimits_3\frac{1}{Q(n)}+O(R),$$

其中$\sum_3$的求和范围是$n\leq x$，$p(n)<Q(n)<p^2(n)$，$L_1<p(n)\leq L_2$. 由条件$p(n)<Q(n)<p^2(n)$可知，必存在素数$q<p(n)$，及整数$k\geq 2$，使得$p(n)<q^k<p^2(n)$，$q^k\|n$，且$Q(n)=q^k$. 同处理G_1的情形类似，我们有

$$G_2=\sum_{L_1<p\leq L_2}\ \sum_{p^{1/k}<q<p^{2/k},\ k\geq 2}\frac{1}{q^k}\{\Psi(\frac{x}{pq^k},\ p)-\Psi(\frac{x}{pq^{k+1}},\ p)\}$$

$$+O(\sum_{L_1<p\leq L_2}\ \sum_{p^{1/k}<q<p^{2/k},\ k\geq 2}\frac{1}{q^k}\sum_{q_1<p,\ q_1^r>p}\Psi(\frac{x}{pq^kq_1^r},\ p))$$

$$+O(R)=G_{21}+O(G_{22})+O(G_{23})+O(R), \tag{3.7}$$

其中G_{23}表示（3.7）式中第一个等号右端的第一个“0”项，和

$$G_{21}=\sum_{L_1<p\leq L_2}\ \sum_{p^{1/2}<q<p}\frac{1}{q^2}\Psi(\frac{x}{pq^2}\ ,\ p),$$

$$G_{22}=\sum_{L_1<p\leq L_2}\ \sum\sum_{p^{1/k}<q<p^{2/k},\ k\geq 3}\frac{1}{q^k}\Psi(\frac{x}{pq^k}\ ,p).$$

同估计G_{11}类似，由引理 3 我们有

$$G_{21}=\sum_{L_1<p\le L_2}\Psi(\frac{x}{p},p)\sum_{p^{1/2}<q<p}q^{\frac{1}{4-2\delta}}(1+O(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}))$$
$$=\sum_{L_1<p\le L_2}\frac{1}{p^{3/2}}\Psi(\frac{x}{p},p)(1+O(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}))$$
$$=\sum_{n\le x}\frac{1}{p^{3/2}(n)}(1+O(\frac{\log_3 x}{\log_2 x})). \tag{3.8}$$

同估计G_{12}，G_{13}类似，我们有G_{22}，$G_{23}\ll R$，于是由此及(3.2)，(3.6)—(3.8)即得(1.7)式.

下面我们来证明(1.8)式．这个证明同(1.2)式的证明完全类似(参看[4])．但考虑到文献[4]在国内不容易找到，因此这里我们给出(1.8)式的简要证明．设

$$L=\exp\{(\frac{1}{r}\log x\log_2 x)^{\frac{1}{2}}\},\quad Z_1=L^{\frac{1}{10}},\quad Z_2=L^{10}.$$

根据引理2，对$Z_1<p\le Z_2$，一致地有

$$\Psi(\frac{x}{p},p)=\frac{x}{p}\rho(\frac{\log x}{\log p}-1)(1+O((\frac{\log_2 x}{\log x})^{\frac{1}{2}})).$$

这样，根据引理1我们有

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{p^r(n)}=\sum_{Z_1<p\le Z_2}\frac{x}{p^{r+1}}\rho(\frac{\log x}{\log p}-1)(1+O((\frac{\log_2 x}{\log x})^{\frac{1}{2}}))$$
$$=(1+O((\frac{\log_2 x}{\log x})^{\frac{1}{2}}))\int_{Z_1}^{Z_2}\frac{x}{t^{r+1}}\rho(\frac{\log x}{\log t}-1)d\pi(t)$$
$$=(1+O((\frac{\log_2 x}{\log x})^{\frac{1}{2}}))\int_{Z_1}^{Z_2}\frac{x}{t^{r+1}\log t}\rho(\frac{\log x}{\log t}-1)dt. \tag{3.9}$$

利用(1.5)，上式最后的积分变成

$$\int_{Z_1}^{Z_2}\frac{-x\log x}{t^{r+1}\log^2 t}\rho'(\frac{\log x}{\log t})dt=\int_{Z_1}^{Z_2}\frac{x}{t^r}d\rho(\frac{\log x}{\log t})$$
$$=\frac{x}{Z_2^r}\rho(\frac{\log x}{\log Z_2})-\frac{x}{Z_1^r}\rho(\frac{\log x}{\log Z_1})+r\int_{Z_1}^{Z_2}\frac{x}{t^{r+1}}\rho(\frac{\log x}{\log t})dt. \tag{3.10}$$

利用(1.6)，我们看出(3.10)右端等于

$$rx\delta_r(x)+O(xL^{-4}).$$

因此，由(3.9)和(3.10)即可推出(1.8)．至此定理全部证完.

参 考 文 献

[1] Ivić, A., Arch. Math. 36(1981). 57—61.

[2] 宣体佐，北京师范大学学报，1984，第二期，11—18.

[3] Ivić, A., and Pomerance, C., Estimates of certain sums involving the largest prime factor of an integer, in: Coll. Math. Soc. J. Bolyai 34, Topics in classical number theory, North-Holland, Amsterdam 1984, 769—789.

[4] Erdös, P., Ivić, A. and Pomerance, C., Glasnik Matematički 21(41)(1986). 283—300.

[5] 华罗庚，中国科学，2(1951)，393—402.
[6] Ivić, A., Acta Arith. 49(1987), 21—33.
[7] 宣体佐，北京师范大学学报，1988，第一期，11—16.
[8] Hildebrand, A., J. Number Theory, 22(1986), 289—307.

Sum of Reciprocal of an Arithmetical Function

Xuan Tizuo

(Department of Mathematics, Beijing Normal University)

Abstract

Let $p(n)$ denote the largest prime factor of an integer $n\geq 2$, and let $Q(n)$ denote the largest prime power which divides $n\geq 2$. The purpose of this paper is to give asymptotic formula for the sum

$$\sum_{2\leq n\leq x}\left(\frac{1}{p(n)}-\frac{1}{Q(n)}\right).$$