第11卷 第1期
1991年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.1
Feb. 1991

非光滑非凸多目标规划的Wolfe型对偶性*

刘三阳
(西安电子科技大学应用数学系)

摘 要

本文利用作者提出的某些非凸概念，讨论了非光滑非凸多目标规划的 olfe型对偶性.

一、前 言

对偶理论是最优化理论的重要组成部分，具有深刻的理论意义和重要的应用价值，光滑单目标规划的对偶理论已经取得了丰硕的成果．近年来，多目标规划和非光滑（或非凸）单目标规划的对偶理论也都获得较大进展．而对于既非光滑、又非凸的多目标规划而言，对偶性方面的工作尚未看到．本文将在较弱的条件下，探讨非光滑非凸多目标规划的Wolfe型对偶理论．关于对偶理论的进一步研究将另文给出．

二、定 义

设$C\subset R^n$是开集，$f:C\rightarrow R^p$, $g:C\rightarrow R^m$．考虑多目标规划

$$(\mathrm{VP})\quad \begin{cases}\min f(x)\\ g(x)\leqq 0\\ x\in C\end{cases}$$

记 $D=\{x\in C: g(x)\leqq 0\}$.

定义 1 称$x^*\in D$是(VP)的有效解，如果不存在$x\in D$使$f(x)\leqq f(x^*)$且$f(x)\neq f(x^*)$.

定义 2 称$x^*\in D$是(VP)的弱有效解，如果不存在$x\in D$使$f(x)<f(x^*)$.

1981年，Hanson[1]根据凸性在证明Kuhn-Tucker条件充分性和弱对偶性时的具体作用，对可微实函数推广了凸性条件，Craven称之为invex(不变凸)．现在，我们对不可微函数，利用右上Dini方向导数，定义几种非凸概念

设$\varphi: C\subset R^n\rightarrow R$, $x^*\in C$, $d\in R^n/\{0\}$，φ在x^*处沿方向d的右上Dini导数为

$$\varphi'_+(x^*;d)=\lim\sup_{t\rightarrow 0^+}\frac{\varphi(x^*+td)-\varphi(x^*)}{t}.$$

上述极限可以为无穷．另外，$\varphi'_+(x^*;0)=0$.

定义 3 称φ在$x^*\in C$处是不变凸的，如果存在向量值函数$\eta: C\rightarrow R^n$使

* 1989年4月3日收到.

$$\varphi(x) \geq \varphi(x^*) + \varphi'_+(x^*;\eta(x)),\quad \forall x \in C.$$

定义 4 称 φ 在 $x^* \in C$ 处是严格不变凸的，如果存在 $\eta: C \to R^n$ 使

$$\varphi(x) > \varphi(x^*) + \varphi'_+(x^*;\eta(x)),\quad \forall x \in C,\ x \neq x^*.$$

称一个向量值函数 f 在 x^* 处是（严格）不变凸的，如果 f 的各个分量函数在 x^* 处关于同一 η 是（严格）不变凸的。

三．Wolfe型对偶性

对应于上述多目标规划（VP），考虑其Wolfe 型对偶规划

$$\text{(VD1)}\quad \max f(x) + \langle\langle y, g(x)\rangle\rangle$$

$$\begin{cases} \lambda^T f'_+(x;d) + y^T g'_+(x;d) \geq 0,\quad \forall d \in R^n & (1) \\ x \in C,\ \lambda \in R^p_+,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,\qquad y \in R^m_+ & (2) \end{cases}$$

其中 $\langle\langle y, g(x)\rangle\rangle$ 表示各分量均为 $y^T g(x)$ 的 p 维（列）向量。

下面讨论（VP）和（VD1）的对偶性。

定理 1（弱对偶性） 设 x 和 (u,λ,y) 分别是（VP）和（VD1）的可行解，且存在同一 $\eta: C \to R^n$ 使 f 和 g 在 u 处均为不变凸的，则有

$$\lambda^T f(x) \geq \lambda^T f(u) + y^T g(u),\quad f(x) \nless f(u) + \langle\langle y, g(u)\rangle\rangle.$$

证明 因为 f 和 g 在 u 处关于 η 是不变凸的，故有

$$f(x) - f(u) \geqq f'_+(u;\eta(x)),\quad g(x) - g(u) \geqq g'_+(u;\eta(x)).$$

这里 $f'_+(u;\cdot) = (f'_{1+}(u;\cdot), f'_{2+}(u;\cdot), \cdots, f'_{p+}(u;\cdot))^T$，$g'_+(u;\cdot)$ 的含义类似。因为 $\lambda \in R^p_+/\{0\}$，$y \in R^m_+$，于是得

$$\lambda^T f(x) - \lambda^T f(u) \geq \lambda^T f'_+(u;\eta(x)),\quad y^T g(x) - y^T g(u) \geq y^T g'_+(u;\eta(x)).$$

以上两式相加，并利用（1）可得

$$\lambda^T f(x) - \lambda^T f(u) + y^T g(x) - y^T g(u) \geq \lambda^T f'_+(u;\eta(x)) + y^T g'_+(u;\eta(x)) \geq 0.$$

注意到 $y \in R^m_+$，$g(x) \leqq 0$，可知 $y^T g(x) \leq 0$，故由上式得

$$\lambda^T f(x) \geq \lambda^T f(u) - y^T g(u).$$

由此易知

$$f(x) - f(u) - \langle\langle y, g(u)\rangle\rangle \nless 0.$$

定理 2（强对偶性） 设 x^* 是（VP）的弱有效解，且存在 $\bar{d} \in R^n$ 使 $g'_+(x^*,\bar{d}) < 0$，如果 $f'_{i+}(x^*;\cdot)$ $(i=1,2,\cdots,p)$ 和 $g'_{j+}(x^*;\cdot)$ $(j=1,2,\cdots,m)$ 是凸函数，则存在 (λ^*, y^*) 使 (x^*,λ^*,y^*) 为（VD1）的可行解且 $y^{*T} g(x^*) = 0$。若再设对任意 $u \in C$，存在 $\eta: C \to R^n$ 使 f 和 g 在 u 处关于 η 是不变凸的，则 (x^*,λ^*,y^*) 是（VD1）的弱有效解，且与（VP）的相应目标值相等。

证明 因为 x^* 是（VP）的弱有效解，根据[2,3]，存在 (λ^*, y^*) 使 (x^*,λ^*,y^*) 为（VD1）的可行解且 $y^{*T} g(x^*) = 0$，故相应的目标值相等。

假若 (x^*,λ^*,y^*) 不是（VD1）的弱有效解，则存在（VD1）的可行解 (ζ,μ,z) 使

$$f(\zeta) + \langle\langle z, g(\zeta)\rangle\rangle - f(x^*) = f(\zeta) + \langle\langle z, g(\zeta)\rangle\rangle - f(x^*) - \langle\langle y^*, g(x^*)\rangle\rangle > 0.$$

而由定理 1 知

$$f(\zeta) + \langle\langle z, g(\zeta)\rangle\rangle - f(x^*) \ngtr 0.$$

这个矛盾说明 (x^*, λ^*, y^*) 是（VD1）的弱有效解．

定理 3（逆对偶性） 设 (u^*, λ^*, y^*) 是（VD1）的可行解，如果存在 $\eta: C \to R^n$，使 f 和 g 在 u^* 处关于 η 是不变凸的，且存在（VP）的可行解 $x^* \in D$ 使 $\lambda^{*T} f(x^*) \leq \lambda^{*T} f(u^*) + y^{*T} g(u^*)$，则 x^* 是（VP）的弱有效解．若再设对（VD1）的任意形如 (u, λ^*, y) 的可行解，f 和 g 在 u 处关于某一 η 是不变凸的，则 (u^*, λ^*, y^*) 也是（VD1）的弱有效解．

证明 由定理 1 知 $\lambda^{*T} f(x) \geq \lambda^{*T} f(u^*) + y^{*T} g(u^*)$，$\forall x \in D$，根据定理条件得

$$\lambda^{*T} f(x) \geq \lambda^{*T} f(u^*) + y^{*T} g(u^*) \geq \lambda^{*T} f(x^*), \quad \forall x \in D.$$

这说明 x^* 是 $\min\limits_{x \in D} \lambda^{*T}(x)$ 的最优解，因为 $\lambda^* \in R_+^p/\{0\}$，故 x^* 是（VP）的弱有效解．

对（VD1）的任意形如 (u, λ^*, y) 的可行解，由定理 1 有

$$\lambda^{*T} f(u) + y^T g(u) \leq \lambda^{*T} f(x^*) \leq \lambda^{*T} f(u^*) + y^{*T} g(u^*).$$

这说明 (u^*, y^*) 是下述单目标规划

$$\begin{cases} \max \lambda^{*T} f(u) + y^T g(u) \\ \lambda^{*T} f'_+(u; d) + y^T g'_+(u; d) \geq 0, & \forall d \in R^n \\ u \in C, \lambda^* \in R_+^p, \quad \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i^* = 1, & y \in R_+^m \end{cases}$$

的最优解，从而 (u^*, λ^*, y^*) 是（VD1）的弱有效解．

对于有效解，有下列对偶定理：

定理 4（弱对偶性） 设 x 和 (u, λ, y) 分别是（VP）和（VD1）的可行解，如果存在 $\eta: C \to R^n$，使 f 和 g 在 u 处关于 η 分别是严格不变凸和不变凸的，则当 $x \neq u$ 时有

$$\lambda^T f(x) > \lambda^T f(u) + y^T g(u), \quad f(x) \nleqq f(u) + \langle\langle y, g(u) \rangle\rangle.$$

证明 由已知条件知，当 $x \neq u$ 时有

$$f(x) - f(u) > f'_+(u; \eta(x)), \quad g(x) - g(u) \geqq g'_+(u; \eta(x)).$$

因为 $\lambda \in R_+^p/\{0\}$，$y \in R_+^m$，故有

$$\lambda^T f(x) - \lambda^T f(u) > \lambda^T f'_+(u; \eta(x)), \quad y^T g(x) - y^T g(u) \geq y^T g'_+(u; \eta(x)).$$

以上二式相加，并利用（1）得

$$\lambda^T f(x) - \lambda^T f(u) + y^T g(x) - y^T g(u) > \lambda^T f'_+(u; \eta(x)) + y^T g'_+(u; \eta(x)) \geq 0.$$

因为 $y^T g(x) \leq 0$，故有

$$\lambda^T f(x) > \lambda^T f(u) + y^T g(u). \tag{3}$$

假如 $f(x) \leqq f(u) + \langle\langle y, g(u) \rangle\rangle$，则由 $\lambda \in R_+^p$，$\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$，得

$$\lambda^T f(x) \leq \lambda^T f(u) + y^T g(u).$$

这与（3）矛盾．故有

$$f(x) \nleqq f(u) + \langle\langle y, g(u) \rangle\rangle.$$

定理 5（强对偶性） 设 x^* 是（VP）的有效解，且存在 $\bar{d} \in R^n$ 使 $g'_+(x^*; \bar{d}) < 0$，如果 $f'_{i+}(x^*; \cdot)$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ 和 $g'_{j+}(x^*; \cdot)$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ 是凸函数，则存在 (λ^*, y^*) 使 (x^*, λ^*, y^*) 为（VD1）的可行解且 $y^{*T} g(x^*) = 0$．若再设对任意 $u \in C$，存在 $\eta: C \to R^n$ 使 f 和 g 在 u 处关于 η 分别是严格不变凸和不变凸的，则 (x^*, λ^*, y^*) 是（VD1）的有效解，且与（VP）的相应

目标值相等.

证明 与定理 2 的证明类似.

定理 6（逆对偶性） 设 (u^*, λ^*, y^*) 和 x^* 分别是（VD1）和（VP）的可行解，且满足 $\lambda^{*T}f(x^*)\leq\lambda^{*T}f(u^*)+y^{*T}g(u^*)$. 如果存在 $\eta:C\to R^n$，使 f 和 g 在 u^* 处关于 η 分别是严格不变凸和不变凸的，则 $u^*=x^*$，且 x^* 为（VP）的有效解. 若再设对任意 $u\in C$ 存在某一 $\eta:C\to R^n$，使 f 和 g 在 u 处关于 η 分别是严格不变凸和不变凸的，则 (u^*, λ^*, y^*) 也是（VD1）的有效解.

证明 假若 $x^*\neq u^*$，由已知条件有

$$f(x^*)-f(u^*)>f_+'(u^*;\eta(x^*)),\ g(x^*)-g(u^*)\geqq g_+'(u^*;\eta(x^*)).$$

因为 $\lambda^*\in R_+^p/\{0\}$，$y^*\in R_+^m$，故有

$$\lambda^{*T}f(x^*)-\lambda^{*T}f(u^*)>\lambda^{*T}f_+'(u^*;\eta(x^*)),$$
$$y^{*T}g(x^*)-y^{*T}g(u^*)\geq y^{*T}g_+'(u^*;\eta(x^*)).$$

以上二式相加并利用（1）可得

$$\lambda^{*T}f(x^*)-\lambda^{*T}f(u^*)+y^{*T}g(x^*)-y^{*T}g(u^*)>\lambda^{*T}f_+'(u^*;\eta(x^*))+y^{*T}g_+'(u^*;\eta(x^*))\geq 0.$$

因为 $y^{*T}g(x^*)\leq 0$，于是有

$$\lambda^{*T}f(x^*)>\lambda^{*T}f(u^*)+y^{*T}g(u^*).$$

这与定理条件矛盾. 因此，$x^*=u^*$

又由定理 4 知

$$\lambda^{*T}f(x)>\lambda^{*T}f(u^*)+y^{*T}g(u^*),\quad \forall x\in D,\ x\neq u^*.$$

由定理条件有

$$\lambda^{*T}f(u^*)+y^{*T}g(u^*)\geq\lambda^{*T}f(x^*).$$

故有

$$\lambda^{*T}f(x)>\lambda^{*T}f(x^*),\quad \forall x\in D,\ x\neq x^*. \tag{4}$$

假如 x^* 不是（VP）的有效解，则存在 $x'\in D$ 使 $f(x')\leqq f(x^*)$ 且 $f(x')\neq f(x^*)$ 于是，得

$$\lambda^{*T}f(x')\leq\lambda^{*T}f(x^*).$$

这与（4）矛盾. 故 x^* 必为（VP）的有效解.

现证 (u^*, λ^*, y^*) 是（VD1）的有效解. 若不然，则存在对（VD1）可行的 (u, y) 使

$$f(u)+\langle\langle y, g(u)\rangle\rangle\geq f(u^*)+\langle\langle y^*, g(u^*)\rangle\rangle \tag{5}$$

（等式不成立）不难看出 $u\neq u^*$，因若不然，则有 $u=u^*$，而已证 $u^*=x^*$，且已知 $\lambda^{*T}f(u^*)+y^{*T}g(u^*)\geq\lambda^{*T}f(x^*)$，于是有

$$0\geq y^{*T}g(x^*)=y^{*T}g(u^*)\leq 0.$$

从而知 $y^{*T}g(u^*)=0$，由（5）和 $u=u^*=x^*$，得

$$0\geq y^Tg(x^*)=y^Tg(u)\geq 0.$$

即有 $y^Tg(u)=0$，于是（5）变成

$$f(u^*)\geq f(u^*)\quad（等式不成立）$$

这显然是一个矛盾，故 $u\neq u^*$

再根据定理 4 和 $y^{*T}g(u^*)=0$ 得

$$f(u)+\langle\langle y, g(u)\rangle\rangle\geqq f(x^*)=f(u^*)+\langle\langle y^*, g(u^*)\rangle\rangle.$$

这与(5)矛盾. 因此(u^*, λ^*, y^*)是(VD1)的有效解.

对游兆永　陈开周教授的热情指导，深表谢意！

参　考　文　献

[1] Hanson, M. A., J. Math. Anal. Appl. 80(1981), 545—550.

[2] 刘三阳，系统科学与数学，9(1)(1989)，53—0.

[3] 刘三阳，非光滑非凸多目标规划的最优性和对偶性，西安交通大学博士论文，1988.

[4] Ben-Tal, A. and Zown, J., JOTA, 47(1985), 483—490.

[5] Mond, B., and Weir, T., Generalized concavity and duality, in "Generalized concavity in optimization and economics", Schaible, S., and Ziemba, W. T. (eds), Academic press, 1981, 263—279.

The Wolfe Type Duality for Nonsmooth Nonconvex Multiobjective Programming

Liu Sanyang

(Xidian University)

Abstract

In this paper, the wolfe type duality for nonsmooth nonconvex multiobjective programming is discussed using some nonconvex concepts given by author.

(from 102)

References

[1] Z. Q. Xia, J. Math. Res. & Exposition, No.4(1987): 681—684.

[2] V. F. Demyanov and A. M. Rubinov. Quasidifferential Calculus. Optimization Software, Inc. Publications Division, New York(1986).

[3] R. W. Chaney, Mathematical Programming, 40(1988): 95—109.