第11卷 第1期
1991年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.1
Feb. 1991

关于多复变数某些积分表示式的剖析*

陈 叔 瑾

（厦门大学）

在多复变数的积分表示的研究中目前存在一些模糊不清的情况．本文就此作一些剖析．

1．在单复变数函数论中Cauchy积分公式扮演着极其重要的角色，其原因无非是这公式具有普遍性——对于一般有界域边界加适当光滑性的限制都能成立，以及该公式的积分核关于变数 z 是全纯的．因此，在多复变数函数论中自然也希望能有单复变数那样的积分公式，但未能做到．实际上，在多复变数情形，一种是利用特殊域所具有的特殊边界性质，用独特的方法来建立其上的积分表示式，如欧氏凸域，圆型域，强拟凸域，四类典型域，解析多面体等的积分公式．这些公式显然已不具普遍性，但其积分核关于 z 皆是全纯的．另一种是在一般有界域（边界加上适当光滑性的限制）上建立积分表示，但积分核关于 z 是可微函数．例如具有一般性的 Bochner-Martinelli 公式（简称B-M公式），此公式的积分核

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}(\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j)\,d\overline{\zeta}_{[j]}\wedge d\zeta/(\sum_{j=1}^{n}|\zeta_j-z_j|^2)^n,$$

关于 z 是非全纯的．作为此公式的最广的拓广是 Canchy-Fantappie 公式（简称C-F公式），此公式的积分核是

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}w_j\,d w_{[j]}\wedge d\zeta/(\sum_{j=1}^{n}w_j(\zeta_j-z_j))^n,$$

其中 $w_j=w_j(\zeta,z)$ 是可微函数．该公式具有普遍性，即只要适当选择此公式中的积分循环和函数 w_j 就可推出（注意有时是很复杂的）上述特殊域上已建立的积分公式．特别应该指出的是C-F公式具有的普遍性，因此如果在一般有界域上通过直接取某些特殊的可微函数 $w_j(j=1,2,\cdots,n)$ 即可得到的积分公式，而重新用证明C-F公式的熟知的方法步骤再去"建立"该积分公式显然已无意义．例如文[1]主要"结果"正是如此，它只不过是C-F公式的特例，实际上文[1]公式（1）只需在C-F公式中取 $w_j=|\zeta_j-z_j|^2(\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j)$；文[1]公式（2）只需在C-F公式中取 $w_j=|\zeta_j-z_j|^{m-2}(\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j)$ 直接就可得到．顺便指出文[1]所用方法步骤只是证明C-F公式常见熟知的方法，而其阐述却还存在一些问题，例如p262中称 $f(\zeta_1,\zeta_2)\omega(\zeta-z,\overline{\zeta}-\overline{z})$ 在 $C^2-\{z_1,z_2\}$ 上为闭形式，但所谓闭形式是指微分 $d[f(\zeta_1,\zeta_2)\omega(\zeta-z,\overline{\zeta}-\overline{z})]=0$，而文[1]在假定 f 在域 D 内全纯，在 $\overline{D}$ 连续之下，何以可在 $C^2-\{z_1,z_2\}$ 求微分，又何以可用Stokes公式得到文[1]中的（10）式？文[1]后半部分用 $|\zeta_j-z_j|^{m-2}(\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j)$ 去代替 $\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j$ 得到所谓光滑函数的B-M积分表示及 $\overline{\partial}$ 方程的解的积分表示的"拓广"形式．与

* 1989年3月11日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

未“拓广”前的公式比较，其证明方法一样，而实际上降低了适用性和简洁性，因为把$\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j$换成$|\zeta_j-z_j|^{m-2}(\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j)$或其他更复杂的可微函数，虽然形式上得到“新”的积分公式，而本质上只是人为地把积分核搞成更为复杂的形式，而无实际意义．另外，在文[1]最后所写的零点个数计算公式(39)是成问题的，因为$f_1^{m/2}$，…，$f_n^{m/2}$（$m\neq 2j$）已是多值函数．

2．本文作者于1979年得到凸域上全纯函数第Ⅰ型积分表示式[6]．1983年有人希望将此结果推广到一般有界域上，他们的想法是对有界域D作如下假定，即域D的边界∂D是逐块光滑的，且满足$\sum_{j=1}^{n}(\zeta_j-a_j)(\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j)\neq 0$（$\zeta\in\partial D$，$z\in D$，$a$是$D$中固定点）[2]，希望用这条件来代替区域$D$的凸性条件．但事实上，文[2]所赋的这个条件对一般有界域是做不到的，即使是凸域也未必成立[7]（实际上对于凸域还需加上特定的限制后才能成立），1986年姚宗元[3]在承认文[2]的基础上希望将文[6]作局部的拓广．局部的拓广想法是来源于1956年Ono I[8]提出的．前面我们已经提到B-M公式虽具有一般性，但其积分核关于变数z非全纯的．为了得到积分核关于z的全纯性，Ono I．提出了把B-M公式作局部的拓广，即设D是具有逐块光滑边界的有界域，对于任意点$z\in D$，选择$\nu\in D$，使得超球$B_r(\nu)\subset D$和$z\in B_r(\nu)$，则只要在C-F公式中的w取作$\overline{\zeta}-\overline{\nu}$和对于$z\in B_r(\nu)$就可得到Bochner-Ono公式

$$f(z)=\frac{(n+1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\overline{\zeta}_k-\overline{\nu}_k)\mathrm{d}\overline{\zeta}_{[k]}\wedge\mathrm{d}\zeta}{\langle\overline{\zeta}-\overline{\nu},\zeta-z\rangle^n} \tag{1}$$

注意(1)式中的核关于$z\in B_r(\nu)$是全纯的，但在整个区域D甚至不是连续函数．至于z在区域$\overline{D}$的外部情形，显然可相应作类似的阐述，只不过我们所感兴趣的是区域D的内点．文[3]作者未体会到这种局部拓广的实质，而作形式“拓广”以致在文[3]的主要定理中的(2)式积分核关于z仍然是非全纯的．因此文[3]的(2)式即使能成立的话也无实际意义．况且其证明是有错误的，文[3]作者没有注意到文[6]中第(2)和(4)式成立是有条件的，即要求Φ_j需与z无关，而文[3]在Φ_j与z有关的情况下使用了文[6]的定理1，导致文[3]证明的错误．顺便指出文[3]中的(2)式是成问题的，因为在那里a，z没有赋予适当限制条件，则重蹈文[2]的错误，实际上文[3]在p397最后已承认文[2]的“结果”。

3．在$\mathbf{C}^n$空间中对于已建立的积分表示式什么情况下需考虑作局部的拓广？如何作局部拓广？

如果在某种区域上已建立了具有关于变数z全纯的积分核的积分公式，则显然已不必再在此种区域上作所谓局部的拓广．例如，在解析多面体上已经建立了在其上全纯函数的积分表示式[9]，此表示式的积分核对于解析多面体内的每一点z都是全纯的．因此在其上再作所谓局部的拓广已无意义，而文[4]恰是为此而作．在前面我们已经提到作局部拓广目的在于考虑到某些积分核从区域整体看关于z非全纯，因此希望把z局限在一定范围内，使得积分核在此范围内关于z是全纯的．下面我们来叙述局部拓广的一般方法[10]．

（i） 令$D\subset\mathbf{C}^n$是一区域，并设$\widetilde{f}:D\times D\to\mathbf{C}$是关于$2n$个变数$(z,w)\in D\times D$中全纯的．若存在一点$p\in D$，具有$\overline{p}\in D$，使得对所有$z$，有$f(z,\overline{z})=0$，则对所有$(z,w)\in D\times D$有$\widetilde{f}(z,w)=0$．

此结论只需引进新坐标$u=z+w$，$v=z-w$即可得到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

（ii）当f是全纯时，怎样的核$K_0(\zeta, z)$仍然导致全纯表示式$\int_{\partial D} f K_0(\cdot, z)$，即$\int_{\partial D} f K_0(\cdot, z)$是与$\bar{z}$无关？固定$p \in D$，对于$\zeta \in \partial D$和$z$是在$p$的适当邻域$U$中，若我们可书$K_0(\zeta, z) = \widetilde{K}_0(\zeta, z, \bar{z})$，其中$\widetilde{K}_0(\zeta, z, w)$关于$(z, w) \in U \times U$全纯，则函数

$$H(z, w) = \int_{\partial D} f \widetilde{K}_0(\cdot, z, w)$$

是在$U \times U$中全纯，并在超平面$w = \bar{z}$上由某积分公式（如B-M公式，特殊的C-F公式）有$H(z, w) = f(z)$，因此由（i），这意味着在$U \times U$中$H(z, w) \equiv f(z)$.

因此文[5]只是C-F公式中取$w_j = (\overline{\zeta_j} - \overline{v_j})|\zeta_j - z_j|^{m-2}$（根据（ii））的显然结论.况且文[5]所给出的积分公式（9）与Ono I.公式相比较，没有增添任何新的内容和有价值的东西，相反是人为地把简洁的积分核和邻域（超球）换成更为复杂而不适用的积分核和邻域（n圆域——超球为其特殊情况）.而且依照这样“换”的话，利用C-F公式可无止境地进行.此外，上面已指出文[4]所作局部拓广是没必要的，倘若要作的话，也只是文[11]中取$N_a = (\overline{\zeta_a} - \overline{v_a})|\zeta_a - z_a|^{m-2}$（根据（ii））的一个特例（注意文[4]所用的证法是类同于文[11]）.

参　考　文　献

[1] 姚宗元，厦门大学学报（自然科学版），3（1986），260—269.

[2] 邬德云、钟忠銮，厦门大学学报（自然科学版），4（1983），406—415.

[3] 姚宗元，厦门大学学报（自然科学版），4（1987），390—398.

[4] 姚宗元，厦门大学学报（自然科学版），5（1988），495—503.

[5] 姚宗元，厦门大学学报（自然科学版），3（1988），274—279.

[6] 陈叔瑾，数学学报，6（1979），743—750.

[7] 陈叔瑾，厦门大学学报（自然科学版），5（1988），491—496.

[8] Ono I., Scien, Rep. Tokyo Kyoiku Daiguku, 1965, Vol.5, 260—266.

[9] Sommer F., Math. Ann., 125（1952），172—182.

[10] R. Michael Renge, Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables, Springer-Verlag, 1986.

[11] 陈叔瑾，数学学报，4（1981），538—544.

The Dissection of some Integral Representations of Several Complex Variables

Chen Shujin

(Xiamen University)

Abstract

We point out the obscure circumstances, they are appeared in the study some integral representations of several complex variables (cf. [1]—[5]).

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.