第11卷 第1期
1991年2月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.1
Feb. 1991

关于Pólya-de Bruijn计数定理局限性的评注*

韩 绍 岑

（四川师范学院数学系，南充）

Pólya-de Bruijn计数定理在组合计数中有着广泛的应用[1—7]. 屠规彰[8]以纠错编码理论中的码字重量分布为背景，指出“Pólya-de Bruijn定理虽很好地解决了Y^X关于群G与H的等价类个数的计算问题，但在应用中仍有局限性：（i）它给出的是整个集合Y^X的等价类个数，而在某些应用中，我们要求对Y^X的某个子集$R\subseteq Y^X$计算其等价类个数；（ii）它只给出了等价类的个数，而未告诉我们每个等价类中有多少个元；（iii）对于Y^X的每个等价类，未给出$f\in F$的特征。”

本文就上述三个问题，介绍有关工作．文中涉及的集合均为有限的．

假设置换群G、H分别作用在集合D、R上．记R^D为从D到R的所有映射所成之集，即$R^D=\{f;\ f:D\to R\}$．置换群$G\times H$作用在R^D上按如下方式：$(\tau fg)(d)=\tau f(g(d))$，$\forall\tau\in H$，$g\in G$．这一作用显然是一等价关系，它把$R^D$分成了若干互不相交的等价类．记这些等价类的集合为$\mathscr{F}$．又假设$Q$为一包含有理数环在内的可换环，记$\omega$为从$R$至$Q$的一映射．定义$f\in R^D$的权为

$$W(f)=\prod_{d\in D}\omega(f(d)).$$

当$H=I$（恒等群）时，容易验证，在同一等价类$F\in\mathscr{F}$中，映射有相同的权．定义等价类的权为$W(F)=W(f)$，$f\in F$．易知，这样的定义是合理的．

通常地，用置换的类型$(b_1(\sigma),b_2(\sigma),\cdots,b_k(\sigma),\cdots)$来刻画该置换$\sigma$的轮换分解．定义群$G$的轮换式为

$$P_G(x_1,x_2,\cdots)=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}x_1^{b_1(\sigma)}x_2^{b_2(\sigma)}\cdots x_k^{b_k(\sigma)}\cdots.$$

G.Pólya[1]用多项式表示出R^D的等价类的数目．

定理1[1]

$$\sum_{F\in\mathscr{F}}W(F)=P_G\left(\sum_{r\in R}\omega(r),\sum_{r\in R}\omega^2(r),\cdots\right).$$

当$H\neq I$（恒等群）时，de-Bruijn给出了相应的计数公式．

定理2[2]

$$|\mathscr{F}'|=P_G\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\frac{\partial}{\partial z_2},\cdots\right)P_H\left(e^{\sum_{i\geq 1}z_i},e^{2\sum_{i\geq 1}z_{2i}},\cdots\right)\Big|_{z_1=z_2=\cdots=0}$$

* 1989年2月4日收到.

其中，$\mathscr{F}'$ 为 R^D 关于 $G\times H$ 的所有等价类的集合.

定理 2 仅仅是一计数公式，它没有刻画出函数的任何特征.事实上，假设 $f_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$，$f_2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 3 & 3\end{bmatrix}$，置换 $\tau=(1)(23)(4)\in H$，$\sigma=(12)(3)(4)\in G$. 则我们有 $\tau f_1\sigma=f_2$，即是说，f_1 和 f_2 属于同一等价类. 但是，我们显然可以验证 $w(f_1)=x_1^2x_2^2$，$w(f_2)=x_1^2x_3^2$，$w(f_1)\neq w(f_2)$，其中，记 $\omega(1)=x_i$，对于 $i=1,2,3,4$.

对于屠规彰所指出的局限性(i)，G. Williamson[9]做了一些工作. 他讨论了当 L 为 D 的子集，但满足 $G(L)=L$ 的情形. 不过，[9]中提出的所谓"Isomorph rejection"问题远比本来就很复杂的定理 2 困难得多.

对于局限性(ii)，[10]、[11]就定理 1 给了回答. [12]则以算法做工具，仅就 $H=C_n$ 循环群时，讨论了定理 2. 当 H 为一般的置换群时，局限性(ii)仍是远而未决的问题.

对于局限性(iii)，当映射的权被定义为和定理 1 中的权一致时，F. Harary 和 E. Palmer[13]给出了部分的解决. 但[13]是通过 f 对赋予特殊的权，使其在同一等价类中不变，推广定理 2 的. 这种方法，其实质上未对定理 1 中映射的权作任何的改变. 要刻画映射的特征，就会出现这种可能，即在同一等价类内部的映射可以有不同的权. G. Williamson[14]声称得到定理 1 的推广，解决了在同一等价类中，映射具有不同"重量"时的计数问题. G. Pick[15]和 D. Smith[16]提出了平均权的思想，即设 Q 为一等价类，$w(f)$ 为 $f\in Q$ 的权. 定义 Q 的权为:

$$w(Q)=\frac{1}{|Q|}\sum_{f\in Q}w(f).$$

这样就定理 2 解决局限性(iii).

如何寻找一个公式，它有效地克服上面三个局限性，这无疑是有趣而又很重要的问题.

参考开献

[1] G. Pólya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen, und Chemische Verbindungen, Acta Math. 68(1937), 145—254.

[2] N. G. de Bruijn, A survey of generalization of Pólya's enumeration theorm, Nienw Arch. Wisk. 19. (1971) 89—112.

[3] 徐利治，蒋茂森，朱自强，计算组合数学，上海科技出版社，1983.

[4] 柯召、魏万迪，组合论，上册，科学出版社，1981.

[5] 钟集，柳泊濂，有根完全多级树的计数，华南师范大学组合数学文集，1984.

[6] F. Harary, The number of linear, directed, rooted, and connected graphs, Trans. Amer. Math. Soc. 78(1955) 445—463.

[7] T. C. An application of Pólya's Theory of Counting to an enumeration problem arising in Quadratic Form Thery., J. C. T. (A) 29, (1980) 174—181.

[8] 屠规彰，组合计数方法及其应用，科学出版社，(1981) 206—207.

[9] G. Williamson, SIAM J. Comput., Vol.2, No.1, (1973) 44—59.

[10] 韩绍岑，查晓亚，科学通报，9 (1986)，715—716.

[11] 韩绍岑，南充师院学报，9 (1988) 1—6.

[12] S.C. Han, An algorithm for Pólya-de Bruijn's enumerative theorem and its application, (submitted).

[13] F. Harary and M. Palmer, J. C. T. 1 (1966) 157—173.
[14] G. Williamson, J. London Math. So . (2) 3, (1971), 411—421.
[15] G. W. Peck, Studies in Applied Mathematics, 60, (1979) 173—176.
[16] G. Rota and D. Smith, Enumeration under group action, Ann. Scuola, Norm. Sup. Pisa; classe di Scienze, Serie. Ⅳ 4 (4); (1977), 637—646.