第11卷 第3期
1991年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.3
Aug. 1991

关于具有多项式约束的l-环*

马京京
（北京人才交流中心）

一、引言

设R是一个l-环（Lattice—ordered ring），F是一个可换的有单位元的全序整环．R称为F上的l-代数，如果R是F上的无扭代数和F上的f-模．F上的l-代数R称为F上的f-代数，若R是一个f-环。令$T=\{r\in R:\ u\wedge v=0\Rightarrow |r|u\wedge v=u|r|\wedge v=0,\ \forall u,v\in R\}$，$T$中的正元素称为$R$的$f$-元．

在［2］中Diem问“一个平方正l-素的l-环是否l-整的?”Steinberg在［5］中证明了每一个这样的l-环若含有单位元或T的左和右零化子等于零，则是整的．本文首先证明一个平方正l-素的l-环若含有非零的f-元，则是整的；若含有左（右）单位元或中心幂等元，则是l-整的．其次将以上结果推广到具有比$x^2\geq 0$更一般的多项式约束的l-代数上．最后给出一个l-半素的l-环成为f-环的一个充分条件并应用于Archimedes l-代数．

设R是F上的l-代数，如果a、$b\in R$，$\alpha|a|\leq|b|$，$\forall\alpha\in F$蕴涵$\alpha=0$，则称R是F上的Archimedes l-代数．R的一个元素e称为R的左超单位，如果$e\in R^+$且对任何$x\in R^+$，$x\leq ex$．$a\in R^+$称为R的一个弱序单位，若对任何$b\in R$，$a\wedge b=0$蕴涵$b=0$． 令$M_2=\{a\in R^+:\ a^2=0\}$，$N_2=\{a\in R:\ a^2=0\}$，对R的任意子集X，规定$r_l(X)=\{a\in R:\ |x||a|=0,\ \forall x\in X\}$，$l_l(X)=\{a\in R:\ |a||x|=0,\ \forall x\in X\}$，分别称为$X$在$R$中的右和左$l$-零化子．

本文所使用的术语、符号与文［5］同．

二、平方正的l-环

一个l-环R称为平方正的，若对任何$a\in R$，$a^2\geq 0$．

下面先考虑含非零f-元（即$T\neq\{0\}$）的平方正l-素的l-环．

引理1 设R是l-半素的l-环．若$a\in R^+$是R的一个f-元且$a^n=0$，n是正整数，则$a=0$．

证明 由［5，Lemma 2］并对n用归纳法．

推论1 设R是平方正l-半素的l-环．对任何$a\in M_2$、$c\in T$，有$a|c|=|c|a=0$．

证明 因为R是平方正的，所以 $|c|$、$|c|a\leq a|c|+|c|a\leq a^2+|c|^2=|c|^2$，由此可得$a|c|a\leq|c|^3$．这样，$a|c|a$是$f$-元且$(a|c|a)^2=0$，由引理1知$a|c|a=0$．于是$(a|c|)^2=(|c|a)^2=0$，而$a|c|$、$|c|a$均为$f$-元，再由引理1得$a|c|=|c|a=0$．

* 1989年8月7日收到．

引理 2 设 R 是平方正 l-素的 l-环．对任何 $a\in R$，$r_l(a)\cap l_l(a)\neq\{0\}$ 当且仅当 $|a|^2=0$．

证明 设 $|a|^2=0$．若 $r_l(a)\cap l_l(a)=\{0\}$，则 $a=0$，因此 $R=r_l(a)=l_l(a)=\{0\}$，此为矛盾，故 $r_l(a)\cap l_l(a)\neq\{0\}$．

现在设 $0\neq y\in r_l(a)\cap l_l(a)$，那么 $|a||y|=|y||a|=0$．任取 $x\in R^+$、$z\in R^+$，有 $(|y||x||a|)^2=(|a||z||y|)^2=0$，因为 R 是平方正的，所以 $|y||x||a|^2z|y|=0$．先固定 x，由 z 的任意性知 $|y||x||a|^2R|y|=\{0\}$，因 R 是 l-素的且 $|y|\neq 0$，故 $|y||x||a|^2=0$．再由 x 的任意性又得到 $|y|R|a|^2=\{0\}$，从而 $|a|^2=0$．

定理 1 设 R 是平方正的 l-环，$T\neq\{0\}$．R 是整的当且仅当 R 是 l-素的．

证明 必要性显然．充分性：先证 R 是 l-整的．设 $0\neq e\in T$，由推论 1 知 $M_2\subseteq r_l(e)\cap l_l(e)$．因为 $|e|$ 是 f-元，从引理 1 知 $|e|^2\neq 0$，再从引理 2 得到 $r_l(e)\cap l_l(e)=\{0\}$，从而 $M_2=\{0\}$．现在设 a、$b\in R^+$，$ab=0$．那么对任何 $x\in R^+$，$(bxa)^2=0$，因为 $M_2=\{0\}$，所以 $bxa=0$．由 x 的任意性知 $bRa=\{0\}$，但 R 是 l-素的，故有 $a=0$ 或 $b=0$，即 R 是 l l-整的．因为 $T\neq\{0\}$，从 R 是 l-整的得 $r_l(T)=l_l(T)=\{0\}$．由 [5, Lemma 6]，对任何 $a\in N_2$，$|a|$ 是 R 的 f-元，即 $a\in T$．但 T 是 R 的凸 f-子环，因而 $|a|^2=|a^2|=0$，再由 R 是 l-整的得 $|a|=0$，从而 $a=0$，$N_2=\{0\}$．现在设 a、$b\in R$，$ab=0$，那么 $a^2b^2=0$，由 R 是平方正 l-整的推得 $a^2=0$ 或 $b^2=0$，再由 $N_2=\{0\}$ 知 $a=0$ 或 $b=0$，因此 R 是整的．

接下来证明一个平方正 l-素的 l-环，若含有一个左（右）单位元或中心幂等元，则必为 l-整的．

命题 1 设 R 是平方正的 l-环，含有一个幂等元 $e\neq 0$，满足 $r_l(e)=l_l(e)=\{0\}$ 和对任何 $a\in M_2$，$aea=0$．那么 R 是 l-简约（l-整）的当且仅当 R 是 l-半素（l-素）的．

证明 必要性显然．充分性：假定 R 是 l-半素的．设 x、$y\in R$，那么 $e(exe\vee eye)\geq exe\vee eye$ 且 $e[e(exe\vee eye)-(exe\vee eye)]=0$，因此 $[e(exe\vee eye)-(exe\vee eye)]\in r_l(e)$，故有 $e(exe\vee eye)=exe\vee eye$，同理知 $(exe\vee eye)e=exe\vee eye$，从而 $e(exe\vee eye)e=exe\vee eye$，这样 eRe 是 R 的一个 l-子环．由 R 是 l-半素的易知 eRe 是 l-半素的，因此 eRe 是平方正 l-半素的 l-环，但 eRe 含有单位元 e，由定理 1 知 eRe 是简约的．设 $a\in R^+$，$a^2=0$．令 $a_1=eae$，由 $aea=0$ 知 $a_1^2=0$，但 $a_1\in eRe$，故 $a_1=eae=0$，再由 $r_l(e)=l_l(e)=\{0\}$ 得 $a=0$，从而 R 是 l-简约的．

推论 2 设 R 是平方正的 l-环，含有一个左（右）单位元．若 R 是 l-半素（l-素）的，则 R 是 l-简约（l-整）的．

证明 设 R 是 l-半素的且含有一个左单位元 1．因为 $1\in R^+$，故有 $r_l(1)=\{0\}$，$l_l(1)=l_l(R)$，但 R 是 l-半素的，从而 $l_l(1)=l_l(R)=\{0\}$，由命题 1 知 R 是 l-简约的．

推论 3 设 R 是平方正 l-素的 l-环，含有一个中心幂等元 $e\neq 0$，则 R 是 l-整的．

证明 由引理 2 知 $r_l(e)\cap l_l(e)=\{0\}$．因为 e 是中心元，所以 $r_l(e)=l_l(e)$，故有 $r_l(e)=l_l(e)=\{0\}$，由命题 1 R 是 l-整的．

Diem的例子([2, P.72])表明存在平方正的 l-环含中心幂等元而不含左或右单位元．

在 [1] 中已经定义一个 l-环 R 是左（右）分配的，若对任何 a、$b\in R$，$c\in R^+$，$c(a\wedge b)=ca\wedge cb$ $((a\wedge b)c=ac\wedge bc)$．如果 R 同时是左和右分配的，则称为分配的 l-环．一个 l-环 R 是分配

的等价于R满足$|ab|=|a||b|$([1, Lemma 1]). 一个分配的l-环若为l-素的，则为全序整环([2, Theorem4.4]).

命题 2 设R是平方正左（右）分配的l-环．若R是l-素的，那么R是l-整的．

证明 先证若$a\wedge b=0$，$ab=0$，则$a^2=0$或$b^2=0$．事实上，因为R是左分配的，由$a\wedge b=0$得$ba\wedge b^2=0$，再由R是平方正的及$(ba)^2=0$得$b^3a\leq b^4$，从而$b^3a=b^3a\wedge b^4=b^2(ba\wedge b^2)=0$．因为$ab^3=b^3a=0$，所以$b^3\in r_l(a)\cap l_l(a)$，由引理 2 知$a^2=0$或$b^3=0$，若$b^3=0$，则$b^2\in r_l(b)\cap l_l(b)$，再由引理 2 知$b^2=0$．

现在取$a\in M_2$，$z\in R^+$，那么$(az-za)^+\wedge(az-za)^-=0$且$(az-za)^-(az-za)^+=0$，由前述$[(az-za)^-]^2=0$或$[(az-za)^+]^2=0$．若$[(az-za)^-]^2=0$，由$R$是平方正的得$a(az-za)^-R(az-za)^-=\{0\}$，再由$R$是$l$-素的知$a(az-za)^-=0$，那么$aza=-a(az-za)=-a[(az-za)^+-(az-za)^-]=0$最后从$z$的任意性得$a=0$．若$[(az-za)^+]^2=0$，同理可得$a=0$，因此$M_2=\{0\}$，$R$是$l$-整的．

三、主要结果的推广

本节将前面得到的主要结果推广到具有比$x^2\geq 0$更一般的多项式约束的l-代数上．

引理 3 设R是一个l-环，$T\neq\{0\}$．R是l-整的当且仅当R满足以下条件：

（a）R是l-素的，

（b）存在$0<e\in T$，对任何$a\in M_2$有$ae\in T$，$ea\in T$．

证明 必要性显然．充分性：设$a\in M_2$，由$ea\in T$，$0\leq a\wedge ea\leq ea$知$a\wedge ea\in T$，但$(a\wedge ea)^2=0$，由引理 1 得$a\wedge ea=0$，从而$ea=ea\wedge ea=0$，同理$ae=0$．任取$x\in R^+$，由$ea=0$得到$(axe)^2=0$，即$axe\in M_2$，由前所证$axe^2=0$，从而$aRe^2=\{0\}$，但R是l-素的且$e^2\neq 0$，故$a=0$，$M_2=\{0\}$，R是l-整的．

在[5]中Steinberg称一个多项式$f(x,y)\in F[x,y]$是美好的，如果$f(x,y)=-g(x,y)+p(y)+h(x,y)$，其中$g(x,y)\neq 0$，所含每一单项式关于$x$的次数为 1 且具有正系数；$h(x,y)=0$或每一单项式关于$x$的次数至少为 2．$f(x,y)$称为$k$-美好的，如果$h(x,y)\in F[x^k,y]$；称为左（右）美好的，如果$g(x,y)$有一个单项式以$x$开头(结尾

定理 2 设R是F上的l-代数，$T\neq\{0\}$．R是l-整的当且仅当R是l-素的且存在$N\in Z^+$，$0<e\in T$，使对任何$a\in M_2$，有一个左和右k-美好的多项式$f(x,y)=-g(x,y)+p(y)+h(x,y)$ ($k\geq 2$，y在$g(x,y)$中的次数$\leq N$)，满足$f(a,e)\geq 0$．

证明 必要性：取$N=1$，$f(x,y)=-(xy+yx)+y^2+x^2$．充分性：对任何$a\in M_2$，存在一个左和右k-美好的多项式$f(x,y)=-g(x,y)+p(y)+h(x,y)$使$f(a,e)\geq 0$．因为$h(x,y)\in F[x^k,y]$ ($k\geq 2$)，所以$h(a,e)=0$．因此$0\leq g(a,e)\leq p(e)\in T$，故$g(a,e)\in T$．$g(x,y)$含有项$\alpha y^n x$、$\beta xy^m$，$\alpha$、$\beta\in F$，$\alpha>0$、$\beta>0$，$0\leq n\leq N$，$0\leq m\leq N$，因此$\alpha e^N a\in T$，$\beta ae^N\in T$，由[5, Lemma 1]知$ae^N\in T$，$e^N a\in T$，$0<e^N\in T$，从引理 3 知$R$是$l$-整的．

引理 4 设R是F上的l-代数，含有一个左单位元$1\in R^+$．R是l-简约（l-整）的当且仅当R是l-半素（l-素）的且对任何$a\in M_2$，存在α、$\beta\in F$，$\alpha>0$，$\beta>0$使得$(\beta a)\cdot 1\leq \alpha\cdot 1$．

证明 设$1\in R^+$和R是l-半素的，则$l_l(1)=l_l(R)=\{0\}$．对任何x、$y\in R$，由 $(x\cdot1\vee y\cdot1)\cdot1\geq x\cdot1\vee y\cdot1$和 $[(x\cdot1\vee y\cdot1)\cdot1-(x\cdot1\vee y\cdot1)]\cdot1=0$知 $(x\cdot1\vee y\cdot1)\cdot1=x\cdot1\vee y\cdot1$，这样$R\cdot1$是$R$的一个$l$-子代数且为$l$-半素的．取$a\in M_2$，由所设知存在$\alpha$、$\beta\in F$，$\alpha>0$、$\beta>0$使 $(\beta a)\cdot1\leq\alpha\cdot1$．令$a_1=(\beta a)\cdot1$，则$a_1^2=0$，$0\leq a_1\in R\cdot1$．因为 1是$R\cdot1$的单位元，所以$\alpha\cdot1$是$R\cdot1$的一个$f$-元，由$a_1\leq\alpha\cdot1$知$a_1$亦为$R\cdot1$的$f$-元，从而由引理 1知$a_1=(\beta a)\cdot1=0$，再由$l_l(1)=\{0\}$和$R$是$F$上的无扭代数得$a=0$，即$M_2=\{0\}$，$R$是$l$-简约的．

假定R是F上的l-代数，1是R的一个左单位元，$1\in R^+$．用S表示 1生成的R的凸l-子代数，即$S=\{x\in R:\ |x|\leq\alpha\cdot1,\ \alpha\in F^+\}$．

以下用$p'(x)$表示$p(x)\in F[x]$的导数．

引理 5 设R是F上的l-代数，1是R的一个左单位元．对R的一个幂零元a，下列陈述的每一个蕴涵：$1\in R^+$和存在$\beta\in F$，$\beta>0$，使得 $(\beta a)\cdot1\in S$．

(a) 存在多项式$p(x)\in F[x^2]$，使得对每一个正整数n，$p(a^n\cdot1+1)\geq0$，$p(a^n\cdot1-1)\geq0$且$0\neq p'(1)\cdot1\in R^+$；

(b) 对每一个正整数n，存在多项式$p_1(x)$、$q_1(x)\in F[x]$使得$p_1(a^n\cdot1+1)\geq0$ $q_1((a^n\cdot1-1)^2)\geq0$且在$R$中$p_1'(1)q_1'(1)\cdot1>0$；

(c) 对每一个正整数n，存在多项式$p_2(x)$、$q_2(x)\in F[x]$使得$p_2(a^n\cdot1+1)\geq0$，$q_2(a^n\cdot1-1)\geq0$且在R中$p_2'(1)q_2'(-1)\cdot1<0$；

(d) $1\in R^+$且对每一个$b\in\{\pm a^n\cdot1,\ n\geq1\}$存在美好多项式$f(x,\ y\in F[x,y]$使$f(b,1)\geq0$和$f'(x,1)(0)<0$．

证明 (a)$\Rightarrow$(b) 取$p_1(x)=p(x)$，$q_1(x)=h(x)$，而$p(x)=h(x^2)$．(b)$\Rightarrow$(c) 取$p_2(x)=p_1(x)$，$q_2(x)=q_1(x^2)$．(c)$\Rightarrow$(d) 令$b=a^n\cdot1$，取$p_2(x)$、$q_2(x)\in F[x]$使$p_2(b+1)\geq0$，$q_2(b-1)\geq0$且$p_2'(1)q_2'(-1)\cdot1<0$．若$p_2'(1)q_2'(-1)>0$，由 [5，P.147] 知$1<0$，此为矛盾，故必$p_2'(1)q_2'(-1)<0$，从而$1\in R^+$．注意到$b=b\cdot1=1\cdot b$，有：

$$\begin{aligned}0\leq q_2(b-1)&=a_0+a_1(b-1)+a_2(b-1)^2+\cdots+a_m(b-1)^m\\&=(a_1-2a_2+\cdots+(-1)^{m-1}ma_m)b+\beta+h(b)\\&=q_2'(-1)b+\beta+h(b),\qquad h(x)\in x^2F[x],\ \beta\in F\end{aligned}$$

相似地，存在$h_1(x)\in x^2F[x]$，$\gamma\in F$，使$0\leq p_2(b+1)=p_2'(1)b+\gamma+h_1(b)$．若$q_2'(-1)<0$，则$f_+(x,y)=q_2'(-1)x+\beta+h(x)$是一个美好多项式，满足$f_+(b,1)\geq0$和$f_+'(x,1)(0)=q_2'(-1)<0$．此外，因$p_2'(1)q_2'(-1)<0$，所以$p_2'(1)>0$，知$f_-(x,y)=-p_2'(1)x+\gamma+h_2(x)$是一美好多项式且$f_-(-b,1)\geq0$和$f_-'(x,1)(0)=-p_2'(1)<0$，这里$h_2(x)=\sum(-1)^i\gamma_ix^i$，如果$h_1(x)=\sum\gamma_ix^i$．若$q_2'(-1)>0$，同理可证．

最后证若 (d) 成立，则$1\in R^+$且存在$0<\beta\in F$使得 $(\beta a)\cdot1\in S$．通过对a的幂零指数用归纳法，可以假定当$k\geq2$时，存在$0<\beta_k\in F$使 $(\beta_ka^k)\cdot1\in S$．设$f(x,y)=g(x,y)+p(y)+h(x,y)$是一个美好多项式，满足$f'(x,1)(0)<0$和$f(a\cdot1,1)\geq0$．因为$g(x,y)$关于$x$是一次的，所以$g(a\cdot1,1)=-\beta_0(a\cdot1)$，其中$\beta_0\in F$，$\beta_0=-f'(x,1)\times(0)>0$．因为$h(x,y)$中每一项关于$x$的次数至少为 2，由前面假定知存在$0<\beta_1\in F$

使$\beta_1 h(a\cdot 1,\ 1)\in S$，从而有$\beta_1\beta_0(a\cdot 1)\leq u$，$u\in S$．对$-a\cdot 1$用相似的多项式有$-\beta_2(a\cdot 1)\leq v$，$v\in S$，$0<\beta_2\in F$．因此，$-\beta_1\beta_0 v\leq\beta_2\beta_1\beta_0(a\cdot 1)\leq\beta_2 u$，若令$\beta=\beta_0\beta_1\beta_2$，则$0<\beta\in F$且$(\beta a)\cdot 1\in S$．

从引理4和5可得推论2的推广，这里仅陈述一个这样的结果，它用到引理5（c）．

定理3 设R是F上的l-代数，含有一个左单位元1．R是l-简约（l-整）的和$1\in R^+$当且仅当R是l-半素（l-素）的且对M_2中每一元a，存在一个多项式$q_2(x)\in F[x]$使$q_2(a-1)\geq 0$和$q_2'(-1)\cdot 1<0$．

证明 必要性：取$q_2(x)=x^2$．充分性：首先，因为总有$0\in M_2$，所以存在$q(x)\in F[x]$使得$q(-1)\geq 0$，$q'(-1)\cdot 1<0$，由［5，P.147］知$1\in R^+$．设$a\in M_2$，那么$a\cdot 1\in M_2$，由假定存在$q_2(x)\in F[x]$使$q_2(a\cdot 1-1)\geq 0$，$q_2'(-1)\cdot 1<0$，故由引理5（c）知存在$0<\beta\in F$使$(\beta a)\cdot 1\in S$，再由引理4便知R是l-简约的．

四、Archimedes l-代数

命题3 设R是一个l-半素的l-环．若R含有一个f-元$e>0$，e是R的弱序单位，则R是一个f-环．

证明 分三步来证．

（a）R是l-简约的．设$a\in R^+$，$a^2=0$，那么$(a\wedge e)^2=0$，因为$0\leq a\wedge e\leq e$，所以$a\wedge e$是R的一个f-元，由引理1得$a\wedge e=0$，再由e是一个弱序单位知$a=0$．

（b）$r_l(e)=l_l(e)=\{0\}$．设$a\in r_l(e)$，因为$e|a|=0$，所以$(|a|\wedge e)^2=0$，与（a）中同理得$|a|=0$，从而$r_l(e)=\{0\}$．相似地有$l_l(e)=\{0\}$．

（c）R满足$x^+x^-=0$，$\forall x\in R$．先设$a\wedge b=0$，$a\in R$、$b\in T$．因为b是一个f-元，所以$ab\wedge b=0$，$(ab\wedge e)\wedge b=0$．但$(ab\wedge e)$、$b\in T$，T是R的一个凸f-子环，由［1，Corollary 1］得$b(ab\wedge e)=0$，从而$(ab\wedge e)^2=0$，由（a）$(ab\wedge e)=0$，再由e是R的一个弱序单位得$ab=0$．

现在设$a\wedge b=0$，a、$b\in R$．令$a_1=a-a\wedge e$，$e_1=e-a\wedge e$．由$b\wedge(a\wedge e)=0$及前述知$b(a\wedge e)=0$，从而$be=be_1$．因为$a_1\wedge e_1=0$，$e_1\in T$，由前述$e_1a_1=0$．同理可得$be(a\wedge e)=0$，故有$bea=bea_1=be_1a_1=0$，$(abe)^2=0$，由（a）知$abe=0$，再由（b）便得$ab=0$，（c）得证．

从［2，Theorem 4.4］知一个满足$x^+x^-=0$的l-半素l-环是一个f-环．

推论4 设R是一个l-环．R是全序整环当且仅当R是l-素的且含有一个f-元$e>0$，e是R的一个弱序单位．

证明 由命题3和［3，Theorem 4.4］．

推论5 设R是F上的Archimedes l-代数，若R含有f-元$e>0$，e是R的一个弱序单位且$r_l(e)=\{0\}$，则R是一个f-代数．

证明 设$a\in R^+$，$a^2=0$，那么$(a\wedge e)^2=0$和$(a\wedge e)\in T$．从而$\forall\alpha\in F^+$，$[\alpha(a\wedge e)]^2=0$和$\alpha(a\wedge e)\in T$．T是R的一个凸f-子代数，故为平方正的，所以$\alpha[e(a\wedge e)]\leq e^2+[\alpha(a\wedge e)]^2=e^2$．但$R$是$F$上的Archimedes l-代数，因此$e(a\wedge e)=0$，再由$r_l(e)=\{0\}$和e是R的一个弱序单位得$a=0$，即R是l-简约的，从命题3知R是一个f-代数．

设 R 是 F 上的Archimedes l-代数．Steinberg证明了若 R 含有一个左超单位同时是 f-元，则 R 是一个 f-代数当且仅当 R 是一个PPI l-代数［4，Theorem 1］．下面定理推广了这个结果．

定理 4 设 R 是 F 上的Archimedes l-代数．假定 R 含有一个 f-元 $e>0$ 满足 $r_l(e)=\{0\}$，则下列陈述等价．

（a）R 是一个 f-代数；

（b）R 是一个PPI l-代数，满足等式 $p(x)^-=0$，对某一 $p(x)\in F[x]$；

（c）R 是一个PPI l-代数，满足等式 $f(x,y)^-=0$，这里 $f(x,y)=-g(x,y)+p(y)+h(x,y)$ 是一个右 k-美好的多项式（$k\geq 2$）且 y 在 $g(x,y)$ 中的次数大于 y 在 $h^+(x,y)$ 中的次数；

（d）R 满足 $f(x^+,x^-)^-=0$，这里 $f(x,y)$ 是满足（c）中条件的一个多项式．

证明 （a）⇒（b）取 $p(x)=x^2$．

（b）⇒（a）由推论 5 只要证 e 是一个弱序单位，限于篇幅这里就不证了，可参考［4, Lemma 1］．

（a）⇒（c）取 $f(x,y)=-(xy+yx)+y^2+x^2$．

（c）⇒（d）显然．

（d）⇒（a）设 $a\wedge e=0$，因 R 是 F 上的 f-模，所以 $\forall\alpha\in F^+$，$a\wedge\alpha e=0$．由 $f(a,\alpha e)\geq 0$，得 $0\leq g(a,\alpha e)\leq p(\alpha e)+h(a,\alpha e)\leq|p|(\alpha e)+h^+(a,\alpha e)$．因为 $a\wedge e=0$，所以 $g(a,\alpha e)\wedge|p|(\alpha e)=0$，从而 $g(a,\alpha e)\leq h^+(a,\alpha e)$．但 $g(x,y)$ 含有一项 $\beta y^n x y^m$，$\beta\in F$，$\beta>0$，$n\geq 0$，$m\geq 0$，（$n+m$）大于 y 在 $h^+(x,y)$ 中的次数．若设 $\alpha\geq 1$，则由 $\alpha^{n+m}(\beta e^n a e^m)\leq h^+(a,\alpha e)$ 推得 $\alpha(\beta e^n a e^m)\leq h^+(a,e)$，再由 R 是 F 上的Archimedes l-代数知 $\beta e^n a e^m=0$，从而 $ae^m=0$，$(e^m a)^2=0$．已知 $h(x,y)\in F[x^k,y]$（$k\geq 2$）和 $e^m a\wedge e=0$，故有 $0\leq g(e^m a,e)\leq p(e)\in T$，故 $g(e^m a,e)\in T$．$g(x,y)$ 含有一项 $\gamma y^{k_1}x$，$\gamma\in F$，$\gamma>0$，$k_1\geq 0$，因此 $\gamma e^{k_1}e^m a\in T$，由［5，Lemma 1］得 $e^{k_1+m}a\in T$．因为 $(e^{k_1+m}a)^2=0$ 和 T 是平方正的，所以 $\forall\alpha\in F^+$，$\alpha e(e^{k_1+m}a)\leq e^2$，由 R 是 F 上的Archimedes l-代数得 $e^{k_1+m+1}a=0$，再由 $r_l(e)=\{0\}$ 得 $a=0$，这样 e 是 R 的一个弱序单位，由推论 5 知 R 是一个 f-代数．

感谢我的导师戴执中教授和漆芝南副教授的指导和帮助！

参 考 文 献

［1］G. Birkhoff and R. S. Pierce, An. Acad. Brasil. Ci. 28(1956), 41—69.

［2］J. E. Diem, Pacific J. Math. 25(1968), 71—82.

［3］D. G. Johnson, Acta. Math. 104(1960), 163—215.

［4］S. A. Steinberg, Proc. Amer. Math. Soc. 89(1983), 205—210.

［5］S. A. Steinberg, Trans. Amer. Math. Soc. 276(1983), 145—164.

On Lattice-Ordered Rings with Polynomial Constraints

Ma Jingjing

Abstract

In this paper, it is shown that an l-prime lattice-ordered ring in which the square of every element is positive must be a domain provided it has non-zero f-elements and be an l-domain provided it has a left (right) identity element or a central idempotent element. More generally, the same conclusion follows if the condition $a^2 \geq 0$ is replaced by $p(a) \geq 0$ or $f(a, b) \geq 0$ for suitable polynomials $p(x)$ and $f(x, y)$. It is also shown that an l-algebra is an f-algebra provided it is archimedean, contains an f-element $e > 0$ with $r_1(e) = 0$, and satifies a polynomial identity $p(x) \geq 0$ or $f(x, y) \geq 0$ (for suitable $f(x, y)$).