第11卷 第3期
1991年8月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.3
Aug. 1991

有关Kegel猜测的若干结果*

葛 祖 金
(复旦大学数学研究所，上海)

摘 要

Kegel曾经提出如下猜测：若环R可以表示为它的两个局部幂零子环S、T之和，即有$R=S+T$，问R是否必是局部幂零的？本文证明：若Kegel猜测不真，则必存在一个本原环可以表示为它的两个局部幂零子环之和．另外，还得到两个与Kegel猜测有关的很有趣的结果．

本文中的环都是指结合环．设B是环R的一个非空子集，若存在正整数n，使对$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in B$，恒有$x_1x_2\cdots x_n=0$，则称$B$是$R$的幂零子集．若$B$的每一个有限子集都是幂零的，则称$B$是$R$的局部幂零子集．下面的引理之证明可见〔1〕.

引理1 设D是由两个不可换不定元x,y组成的集合，R是一个环，B是R的任一个非空子集，以$B〔D〕$表示关于两个不可换不定元x、y的、系数属于B的多项式全体．则对任意一个环R，公式$J(R〔D〕)=L(R)〔D〕$成立．

定理1 若Kegel猜测不真，则必存在一个本原环R_1及R_1的两个局部幂零子环S_1、T_1，使有$R_1=S_1+T_1$成立．

证明 若Kegel猜测不真，则存在一个环R及R的两个局部幂零子环S、T使$R=S+T$，而R不是局部幂零的．于是$L(R)\neq R$，由引理1，$J(R〔D〕)=L(R)〔D〕\neq R〔D〕$，所以有$R〔D〕$的一个本原理想I，使$I\neq R〔D〕$，自然地$R〔D〕/I$是本原环．因为S、T是局部幂零的，易知$S〔D〕$、$T〔D〕$都是$R〔D〕$的局部幂零子环，且有$R〔D〕/I=(S〔D〕+I)/I+(T〔D〕+I)/I$.(因为$R〔D〕=S〔D〕+T〔D〕$) 令$R_1=R〔D〕/I$，$S_1=S〔D〕+I/I$，$T_1=T〔D〕+I/I$，则定理1得证．

定理2 设R是一个环，若存在R的局部幂零子集S和幂零子集T，使$R=S+T$，则R必是局部幂零的．

证明 与定理1的证明类似．若定理2不真，则必存在本原环R及R的局部幂零子集S和幂零子集T，使$R=S+T$，显然$T\neq 0$,因为$T=0$时，$R=S$，与R是本原环矛盾．因此有正整数n，使$T^n\neq 0, T^{n+1}=0$.任取T^n中一个非零元素$a\neq 0$,则有$aT=Ta=0$.由于R是本原环，不妨R是除环Δ上的向量空间V上的稠密线性变换环．不妨R在V上的作用是右作用，即V作为R-模是右R-模．因为$a\neq 0$,所以有$v\in V$，使$va\neq 0$.又由稠密定理，存在$r\in R$,使$(va)r=va$.因为$R=S+T$,不妨$r=s+t$, $s\in S$, $t\in T$.由$aT=0$知$at=0$.所以$va=(va)r=v(ar)=$

* 1989年9月23日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$v(as+at)=(va)s=(va)s^2=\cdots=(va)s^n=\cdots$.但 s 是 S 中的幂零元，所以$va=0$,导致矛盾。于是定理 2 得证。

定理 3 设 R 是一个环，若存在 R 的两个幂零子集 S、T，使 $R=S+T$，则 R 幂零。

证明 设 D 是由一些不可换不定元组成的集合，且存在一个满射 $\varphi: D\to R$，这样的集合 D 显然存在。令 K 是由 D 中的不定元生成的不可换的、且不含单位元的自由半群。令

$$R(D)=\{\sum_{x\in K} r_x x \mid r_x\in R,\ \forall x\in K\}$$

设 $f=\sum_{x\in K} a_x x$，$g=\sum_{x\in K} b_x x$ 是 $R(D)$ 中任两个元素（注意：可以有无穷个 $a_x\neq 0$），我们定义 f、g 之间的加法和乘法运算为通常的形式级数之间的运算，即令

$$f+g=\sum(a_x+b_x)x,\ fg=\sum c_x x$$

其中 c_x 如此确定：设 $x=d_1d_2\cdots d_k, d_1,\cdots,dd_k\in D$，若 $k=1$，则令 $c_x=0$；若 $k>1$，设 $d_1d_2\cdots d_j$ 相对于 f 的系数是 a_j，$d_{j+1}\cdots d_k$ 相对于 g 的系数是 b_j，$j=1,2,\cdots,k-1$；则令 $c_x=\sum_{j=1}^{k-1} a_j b_j$。$R(D)$ 在此运算之下显然成为一个环。下证 $R(D)=S(D)+T(D)$。其中 $S(D)=\{\sum_{x\in k} a_x x\in R(D) \mid a_x\in S,\ \forall x\in K\}$，$T(D)$ 类似地定义，因为 $R=S+T$，所以对 $\forall\sum_{x\in k} r_x x\in R(D)$，和 $\forall r_x\in R$，$\exists s_x\in S$，$t_x\in T$，使 $r_x=s_x+t_x$，所以 $\sum r_x x=\sum(s_x+t_x)x=\sum s_x x+\sum t_x x\in S(D)+T(D)$。得 $R(D)=S(D)+T(D)$。又因 S、T 幂零，由 $R(D)$ 的乘法定义即知 $S(D)$、$T(D)$ 皆幂零。故环 $R(D)$ 可以表示为它的两个幂零子集 $S(D)$ 与 $T(D)$ 的和。$S(D)$ 显然也是局部幂零的，由定理 2，$R(D)$ 是局部幂零的，因此是诣零的。

令 d_1,d_2 是 D 中两个不同的不可换不定元，$r_1,r_2\in R$，令 $f=r_1d_1+r_2d_2\in R(D)$。若 f 是幂零的，显然 R 的子集 $\{r_1,r_2\}$ 也是幂零的，同样地，设 $f=\sum_{d\in D} r_d d$，若 f 是幂零的，则 R 的子集 $\{r_d \mid d\in D\}$ 也是幂零的。特别地，令 $f_0=\sum_{d\in D}\varphi(d)d\in R(D)$，因为 $R(D)$ 是诣零的，所以 f_0 是诣零的，于是 $\{\varphi(d)\mid d\in D\}$ 是 R 的幂零子集，由 φ 是满射即知 R 是幂零的。注意，$\sum_{d\in D}\varphi(d)d$ 看作是 $R(D)$ 中元素，是舍去了系数为 0 的项，其实 $\sum_{d\in D}\varphi(d)d=\sum_{d\in D}\varphi(d)d+\sum_{x\in K\setminus D} 0\cdot x$。定理 3 至此得证。

最后我们看一个例子。令 $M_2(F)$ 是域 F 上的二阶矩阵环，令 $S=\{\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}\mid a\in F\}$，$T=\{\begin{pmatrix}0&0\\a&0\end{pmatrix}\mid a\in F\}$，$R=S+T$。则 S、T 皆是幂零的，但 R 却不是幂零的。然而这并不与定理 3 的结果相矛盾，因为本例中的 R 自身并不是一个环，它关于乘法运算不封闭。因此在定理 3 中，“R 是一个环”的条件是不可少的。

本文是在导师许永华教授悉心指导下完成，谨此致谢！

参 考 文 献

〔1〕E.R.Puczytowski, Radicals of polynomial rings, Power series rings and tensor products, Communications in Algebra, 8(18)(1980) 1699—1709.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

Some Consequences Concerning the Kegel Conjecture

Ge Zujin

(Mathematics institute of Fudan University, Shanghai)

Abstract

It is shown in this paper that a ring R satisfying following condition must be locally nilpotent: there exist a locally nilpotent subset S of R and a nilpotent subset T of R such that $R = S + T$ holds.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.