第11卷 第3期
1991年8月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.3
Aug. 1991

半拓扑子集的一些性质*

李 厚 源
（山东大学数学系，济南）

摘 要

本文引入半边界，并且进一步研究了半拓扑子集的一些性质，例如十集定理（定理 2.6）. 另外也讨论了子空间，乘积空间和商空间中的半开集.

0. 引 言

自从N·Levine在〔1〕中定义了半开集和半连续性，近年来引入了半闭包和半同胚等概念，还进行了半分离性，半紧性和半同胚性等一系列研究. 本文主要对半拓扑子集进行刻划，并得到它们的一些新性质. 另外初步讨论了子空间，乘积空间和商空间中的有关问题.

在〔1〕〔2〕〔3〕〔4〕中已有下列结果:

设（$X,\mathscr{T}$）为拓扑空间，用$\overline{A}$和A^o记子集A的闭包和内部，用SO（X）记所有半开集族，半开集的补集是半闭集. 由于任意多个半开集的并集是半开集和任意多个半闭集的交集是半闭集；可引入A的半闭包为包含A的所有半闭集的交集，记作$\underline{A}$；A的半内部为包含在A中的半开集的并集，记作A_o.

定理0.1 对于子集A有关系：$A^o\subset A_o\subset A\subset \underline{A}\subset \overline{A}$.

定理0.2 下列各条等价（括号中为对半闭集的结论）

（1）A是半开集（B是半闭集）.（2）$A=A_o(B=\underline{B})$.（3）$A\subset A^{o-}(B^{-o}\subset B)$.（4）$A\subset A_{o-}(B_{-o}\subset B)$.

定理0.3 若$A\in$SO（X），并且$A\subset D\subset \overline{A}$，则$D\in$SO（$X$）；若$B$为半闭集，并且$B^o\subset E\subset B$，则$E$为半闭集.

定理0.4 $\overline{(\underline{A})}=(\underline{\overline{A}})=\overline{A}$，（2）$(A_o)^o=(A^o)_o=A^o$.

定理0.5 为书写方便约定记号$A_c=X-A$.（1）$A_o=X-\underline{(X-A)}=A_{c-c}$，（2）$\underline{A}=X-(X-A)_o=A_{coc}$.

定理0.6 $A^{-o}\subset A_{-o}$.

1. 半 边 界

定义1.1 设$x\in X$，U为X的子集，若存在半开集V使得$x\in V\subset U$，称U为x的半邻域或S-邻域. 点x的S-邻域系用Su_x表示. 如果x的每一个S-邻域U都有$U\cap(A-\{x\})\neq\phi$称x为A的半聚点[5]. 集A的所有半聚点的集合称为A的半导集，记作A_d（A的导集用A^d表示）.

命题1.1 （1）A为半闭集的充要条件是$A_d\subset A$.（2）$A\cup A_d$是X的半闭集，且$\underline{A}=$

*1989年9月16日收到.

$A \cup A_d$.

注 1　由（2）直接得到点$x \in \underline{A}$的充要条件是x的每一个S-邻域与A的交非空[5].

定义1.2　设A为X的子集，$x \in X$，如果x的任一S-邻域既有A的点，又有$X-A$的点，则称x为A的半边界点．A的所有半边界点的集合，称为A的半边界，记作A_b.（A的边界记作A^b).

显然有$A_b \subset A^b$和$A_b = \underline{A} \cap \underline{(X-A)}$.

定理1.2　设A为X的子集，下列结论成立：

（1）$\underline{A} = A_o \cup A_b$，$A_o = \underline{A} - A_b = A - A_b$.

（2）A为半闭集的充要条件为$A_b \subset A$.

（3）A为半开集的充要条件为$A \cap A_b = \phi$.

证明　（1）利用定理 0.5有：$A_o \cup A_b = A_o \cup (\underline{A} \cap (\underline{X-A})) = \underline{A} \cap (A_o \cup (X - A_o)) = \underline{A}$，注意到$A_o$和$A_b$不相交便可得到$A_o = \underline{A} - A_b = A - A_b$.

（2）A为半闭集$\Leftrightarrow \underline{A} = A_o \cup A_b = A \Leftrightarrow A_b \subset A$.

（3）A为半开集$\Leftrightarrow A = A_o = A - A_b \Leftrightarrow A \cap A_b = \phi$.

同样可用网的半收敛刻划半拓扑子集[5].

容易证明和〔1〕中刻划半开集的定理相对偶有：

定理1.3　设B为半闭集，则$B = F \cap K$，其中（1）F为闭集，（2）$F \cup K = X$，（3）K为内稠集（即是$K^{o-} = X$).

对半拓扑子集有些性质不一定成立．

例 1　设$X = [0,2]$为实数空间的子空间，令$A = [0,1)$，$B = (1,2]$则$(A \cup B)_d \neq A_d \cup B_d$；$\underline{A \cup B} \neq \underline{A} \cup \underline{B}$，令$C = (0, \frac{1}{2}]$，$D = [\frac{1}{2}, 1)$，则$(C \cap D)_o \neq C_o \cap D_o$.

什么条件下半开集保持有限个的交集仍为半开集呢?〔6〕中已有一些结果．容易看出当对任意开集U和V适合$\overline{U \cap V} = \overline{U} \cap \overline{V}$时，半开集的有限个的交集仍为半开集．这时SO$(X)$构成$X$上一个拓扑，我们用$S\mathscr{T}$表示，即$S\mathscr{T} = \mathrm{SO}(X)$．下面作为引入半边界等的应用有定理：

定理1.4　当拓扑空间$(X, \mathscr{T})$的半开集族SO(X)构成拓扑$S\mathscr{T}$时，拓扑空间$(X, S\mathscr{T})$中的半开集族仍为$S\mathscr{T}$，即适合$S\mathscr{T} = S(S\mathscr{T})$.

证明　因为在$(X, S\mathscr{T})$中点的邻域就是在$(X, \mathscr{T})$中点的S-邻域，由定理 0.2所以有$S\mathscr{T} = S(S\mathscr{T})$.

2．半闭包和半内部的一些性质

命题2.1　若$\underline{A} = \underline{B}$则$\overline{A} = \overline{B}$；若$A_o = B_o$则$A^o = B^o$.

注 2　命题 2.1的逆命题不一定成立．

在例 1 中看到有些原来闭包等的性质对半闭包等不成立了，但有下列性质：

命题2.2　（1）若A和B中至少有一个为闭集，则$\underline{A \cup B} = \underline{A} \cup \underline{B}$.

（2）若A和B中至少有一个为开集，则$(A \cap B)_o = A_o \cap B_o$.

证明　（1）若A为闭集$\overline{A} = A$，由〔2〕中等式可得，$\underline{A \cup B} = \underline{(\overline{A} \cup B)} = \overline{A} \cup \underline{B} = \underline{(\overline{A})} \cup \underline{B} = \underline{A} \cup \underline{B}$.

（2）可先证等式 $(A^o\cap B)_o=A^o\cap B_o$，又知若$A$为开集有$A=A^o$，所以 $(A\cap B)_o=(A^o\cap B)_o=A^o\cap B_o=(A^o)_o\cap B_o=A_o\cap B_o$.

命题2.3 对于子集A下式成立

（1） $(\underline{A})^o\subset A^{-o}\subset A_{-o}\subset(\overline{A})_o$,

（2） $\underline{(A^o)}\subset A_{o-}\subset A^{o-}\subset(A_o)^-$,

命题2.4 （1） $(\underline{A})^o=A^{-o}$, （2） $A^{o-}=(A_o)^-$.

证明 因$\underline{A}$为半闭集有$A^{-o}=(\underline{A})^{-o}\subset\underline{A}$, 由此推出$A^{-o}\subset(\underline{A})^o$，结合命题2.3得（1）.类似可证（2）式.

定理2.5 设A为X的子集，则利用半闭包和半内部算子从A至多可作出五个不同集合.

证明 因为A_{-o}满足 $(\underline{A})^o\subset A_{-o}\subset\underline{A}$，而$\underline{A}$为半闭集，据定理0.3，$A_{-o}$为半闭集，故$A_{-o-}=A_{-o}$，（1）式成立；类似可证得（2）式. 注意到$A_{oo}=A_o$和$A_{--}=\underline{A}$，因此交替出现为$A$，$\underline{A}$，$A_{-o}$，$A_o$，$A_{o-}$共五个集合.

定理2.6 设A为X的子集，则利用半闭包，半内部和取补集算子，从A至多可作出十个不同集合.

证明 注意到定理0.5，只需考虑半闭包和取补集两种算子交替出现的情况，按照约定用A_c记A的补集，即$A_c=X-A$，注意到$A_{-o-}=A_{-o}$，$A_{o-o}=A_{o-}$，因此有

$$A_{-c-c-}=A_{-o-}=A_{-o}=A_{-c-c},$$

$$A_{c-c-c-c}=A_{o-o}=A_{o-}=A_{c-c-},$$

故有十个集合为：（1）A，（2）$\underline{A}$，（3）A_{-c}，（4）A_{-c-}，（5）A_{-c-c}，（6）A_c，（7）A_{c-}，（8）A_{c-c}，（9）A_{c-c-}，（10）A_{c-c-c}.

（注意：$A_{c-c-c-}=A_{c-c-c-cc}=A_{c-c-c}$）

下面举例说明存在实数空间中子集A，从它确实可以作出定理2.6中十个不同集合.

例 2 实数空间X中取A为两个开区间，和开区间 $(3,4)$中有理数以及一个孤立点，即是$A=(1,2)\cup(2,3)\cup(3,4)_Q\cup\{5\}$. 其中 $(3,4)_Q$表示开区间 $(3,4)$ 中的有理数，读者可直接写出它的十个不同集合.

3．子空间，乘积空间和商空间中的半开集

定理3.1 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，Y为X的子空间，若G为Y中半开集，则一定存在X中半开集A使得$G=A\cap Y$.

证明 因G为Y中半开集，存在Y中开集U，$U=V\cap Y$，其中$V\in\mathscr{T}$使$U\subset G\subset C_Y(U)=\overline{U}\cap Y$，这里$C_Y(U)$ 表示U在Y中闭包. 取$A=V\cup G$则有$V\subset A\subset\overline{V}$，所以$A$为$X$中半开集，且$A\cap Y=G$.

注 3 定理3.1的逆命题不一定成立，但当Y为X中α集时（即满足$Y\subset Y^{o-o}$），有命题：

命题3.2 当Y为X中α集时，若A为X中半开集，则$A\cap Y$为Y中半开集[6].

定理3.3 设A为乘积空间$X_1\times X_2$中非空子集，且$A=A_1\times A_2$，其中$A_i\subset X_i\ (i=1,2)$，则A为$X_1\times X_2$中半开集的充要条件是A_1和A_2分别为X_1和X_2中半开集[1].

对于商空间，先看下面例子：

例 3 设X为实数空间，等价关系R：

$$R=\{(t_1,t_2)\,|\,t_1,t_2\in A=[0,1)；\text{或}t_1=t_2，\text{当}t_1\in X-A\},$$

则商映射 $p: X \to X/R$ 为连续映射，$A=[0,1)$ 为 X 中半开集，但 $p[A]=[\frac{1}{2}]_R \in X/R$，$[\frac{1}{2}]_R$ 在商空间 X/R 中不是半开集.

命题3.4 设 X,Y 为拓扑空间，$f: X\to Y$ 是连续的几乎开映射，则 f 为不定映射.

证明 因 f 是几乎开映射，对 Y 中开集 V 有，$f^{-1}(\overline{V})\subset\overline{f^{-1}(V)}$，若 $A\in SO(Y)$，则存在 Y 中开集 V 使 $V\subset A\subset\overline{V}$，由于 f 是连续的所以 $f^{-1}(\overline{V})=\overline{f^{-1}(V)}$ 且 $f^{-1}(V)$ 为 X 中开集，即有 $f^{-1}(V)\subset f^{-1}(A)\subset f^{-1}(\overline{V})=\overline{f^{-1}(V)}$，故 $f^{-1}(A)$ 为 X 中半开集，即 f 为不定映射.

注4 这一命题是〔4〕中结果的推广.

命题3.5 设 X,Y 为拓扑空间，$f: X\to Y$ 是连续半开映射，当 $A\in SO(X)$ 时，则 $f(A)\in SO(Y)$.

证明 设 $A\in SO(X)$，存在 X 中开集 U 使 $U\subset A\subset\overline{U}$，因 f 连续有，$f(U)\subset f(A)\subset f(\overline{U})\subset\overline{f(U)}$，又因 f 为半开映射，它把开集 U 映成半开集 $f(U)$，据定理0.3，$f(A)\in SO(Y)$.

因为商映射 p 为连续映射，有定理：

定理3.6 （1）当商映射 $p: X\to X/R$ 为半开映射时，若 $A\in SO(X)$，则 $p[A]$ 为商空间 X/R 中的半开集；

（2）当商映射 p 为几乎开映射时，若 $\mathscr{A}$ 为商空间 X/R 中半开集，则 $p^{-1}[\mathscr{A}]\in SO(X)$.

最后举例说明商空间中半开集的情况：

例4 设 X 为正则空间，关系 R 为 $R=\{(x,y)\mid(x,y)\in X\times X, y\in\overline{\{x\}}\}$，，由 X 的正则性可看出 R 是一等价关系. 设 p 为 X 到商空间 X/R 的商映射，则 p 为开映射，因为若 G 为 X 中开集，X 为正则空间，任意 $x\in G$，存在 x 的闭邻域 B，$B\subset G$，所以 $\overline{\{x\}}\subset G$，由此 $p^{-1}(p[G])=G$，故 $p[G]$ 为 X/R 中的开集. 由定理3.6，若 $A\in SO(X)$，则 $p[A]$ 为商空间 X/R 中半开集；并且若 $\mathscr{A}$ 为 X/R 中半开集，则 $p^{-1}[\mathscr{A}]$ 为 X 中半开集.

参 考 文 献

〔1〕N.Levine, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, Monthly AMS 70(1963), 36-41.

〔2〕S.Gene Crossley and S.K.Hildebrand, Texas J.Sci.Vol.22 No.2 & 3 (1971),99-112.

〔3〕———, ———, Semi-closed sets and semi-continuity in topological spaces,ibid 123-126.

〔4〕———, ———, Semi-topological properties, Fund. Math. 74(1972) 233-254.

〔5〕Charles Dorsett, Semi-convergence and semi-compactness,Indian J.M.M.Vol 19 Nol (1981) 11-17.

〔6〕O.NjAstad, Pacific J.Math.Vol 15No3 (1965), 961-970.

Some Properties of Semi-Topological Subsets

Li Houyuan

(Dept.Math.,Shandong University,Jinan)

Abstract

In this paper, We introduce semi-boundary and further investigate some properties of semi-topological subsets, for example, ten-set theorem (Th·2·6). In addition, we also discuss the semi-open set of subspaces, product spaces and quotient spaces.